Cours 08 – Triangles isométriques – Triangles semblables

I. Les isométries du plan

Définition :

Une isométrie est une transformation du plan qui conserve les longueurs.

Propriétés :

- Les translations, symétries centrales, les symétries axiales et les rotations sont des isométries.
- Les isométries conservent les distances, les mesures d'angles géométriques, les aires, le contact, l'alignement, le parallélisme et l'orthogonalité.

II. Triangles isométriques

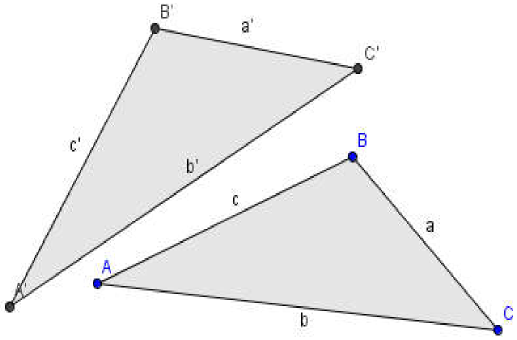
Définition :

Deux triangles sont isométriques lorsque leurs côtés sont, deux à deux, de mêmes longueurs.

Propriété : Deux triangles sont isométriques si les sommets de l'un sont les images des sommets de l'autre par une isométrie ou une succession d'isométries.

Propriété (admise) :

Deux triangles sont isométriques si l'une des trois conditions suivantes est réalisée :
(1) Les trois côtés de l'un des triangles sont égaux aux trois côtés de l'autre ;
(2) Deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés de l'autre et les angles situés entre ces deux côtés sont égaux ;
(3) Deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles de l'autre et les côtés compris entre les sommets de ces angles sont égaux.

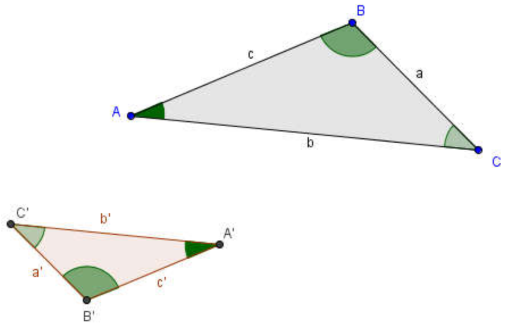


Avec les notations $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$…
(1) Si $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$ alors ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.
(2) Si $a = a'$, $b = b'$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$ alors ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.
(3) Si $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et si $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et si $c = c'$ alors ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

III. Triangles semblables

Définition :

Deux triangles sont semblables lorsque les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre.



Remarque : Deux triangles semblables sont également appelés triangles de même forme.

Propriétés :

- Deux triangles semblables à un même troisième sont semblables
- Deux triangles isométriques sont semblables
- Deux triangles équilatéraux ou rectangles isocèles sont semblables.

Propriété caractéristique des triangles semblables :

Deux triangles sont semblables si, et seulement si, les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés de l'autre

Remarque : dans la définition, on parle par abus de langage, on dit "les angles de l'un" alors qu'on devrait dire "la mesure des angles" et dans la propriété ci-dessus, on parle de "côtés proportionnels" alors qu'il s'agit de leurs longueurs.

IV. Exercices

Exercice 1

Construire un triangle $A'B'C'$ isométrique au triangle ABC tel que :

1. $BC = 9cm$, $AB = 5cm$ et $AC = 8cm$
2. $BC = 12cm$, $AB = 6cm$ et $\widehat{ABC} = 72°$.
3. $AB = 6cm$, $\widehat{CAB} = 50°$ et $\widehat{CBA} = 55°$

Exercice 2

ABC et $A'B'C'$sont deux triangles semblables tels que $BC = 6$, $AC = 4$, $AB = 8$ et l'une des longueurs des côtés $A'B'C'$vaut 9.

1- Quelles peuvent être les longueurs des côtés du triangle $A'B'C'$? On donnera toutes les possibilités. On donnera les longueurs sous forme fractionnaire.

2- Construire un triangle ABC et un triangle $A'B'C$ respectant les contraintes de l'énoncé.

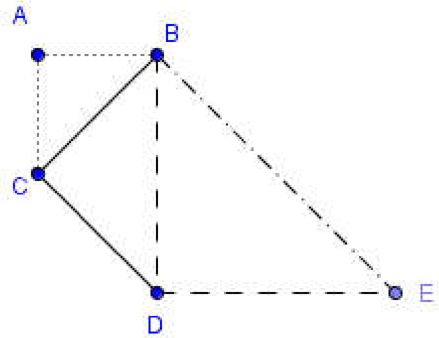
Exercice 3

M, N et P sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et [AC] d'un triangle ABC.
Montrer que les triangles AMP, BMN, CPN et MNP sont isométriques.

Exercice 4

Sur le dessin ci-contre, les triangles ABC, BCD, BDE sont respectivement rectangles isocèles en A, C et D.

1. Pourquoi ces trois triangles sont-ils semblables ?
2. On pose $DE = 1$. Calculer les longueurs BE, BC puis AB.
3. Montrer que les triangles ABE et CDE ont chacun un angle de 135°. Ces triangles sont-ils semblables ?
4. Montrer que les triangles ACD et DCE sont semblables.



Exercice 5

$ABCD$ est un trapèze isocèle de bases $[AB]$ et $[DC]$.
Pré-requis : Le trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[CD]$ est isocèle si et seulement si il admet la médiatrice commune de $[AB]$ et $[CD]$ pour axe de symétrie.
Montrer que les diagonales sont égales de deux façons différentes :

- en utilisant une symétrie axiale
- puis en prouvant l'existence de deux triangles isométriques.

Exercice 6

ABC est un triangle, M est le milieu de $[BC]$ et on suppose que les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux.

1. Faire une figure.
2. Montrer que les triangles ABM et ABC sont semblables.
3. En utilisant la proportionnalité des longueurs des côtés, montrer que $BA^2 = BC \times BM$ puis que $BA = \sqrt{2} \times BM$.

Exercice 7

On considère un cercle et un point P extérieur à ce cercle. Deux droites passant par P coupent l'une le cercle en A et en B, l'autre en C et en D.

1- Faire une figure.

2- Démontrer que les triangles PCB et PAD sont semblables.. En déduire que $PA \times PB = PC \times PD$.

3- (AD) coupe (BC) en R. Montrer que $RA \times RD = RB \times RC$