

# Identités remarquables

الأستاذ : ناصر ب.  
www.nacermaths.com

## I Développer et réduire

Rappel des classes précédentes

### Règles générales

distributivité simple

$$a(b + c - d) = ab + ac - ad$$

produit de 2 sommes

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Le 1<sup>er</sup> membre est une expression factorisée (un produit)

Le 2<sup>ème</sup> membre est une expression développée (une somme)

On développe un produit pour obtenir une somme

### Exemples :

Développer et réduire :

<p>On reconnaît 2 « expressions produit » que l'on <b>développe</b> avec la 1<sup>ère</sup> règle on notera que la règle des signes de la multiplication s'applique. On <b>réduit</b> les termes « de même unité » Le calcul est terminé, ces 2 derniers termes ne peuvent plus se réduire</p>	$2(x - 2) + 5x - 7(2x + 3) =$ <p style="text-align: center;">⏟ et ⏟</p> $4x - 4 + 5x - 14x - 21 =$ $4x + 5x - 14x - 4 - 21 =$ $- 5x - 25$
<p>On reconnaît un produit de 2 sommes, que l'on <b>développe</b> à l'aide de la 2<sup>ème</sup> règle, en multipliant chaque terme de la 1<sup>ère</sup> somme par chaque terme de la 2<sup>ème</sup>. On <b>réduit</b> comme précédemment Le calcul est terminé ces 3 termes ne sont plus réductibles.</p>	$(2 - 3x)(x + 5) =$ $2x + 10 - 3x^2 - 15x =$ $2x - 15x + 10 - 3x^2 =$ $- 13x + 10 - 3x^2$

## II Développer avec des identités remarquables

Une façon particulière de développer consiste à utiliser 3 identités remarquables

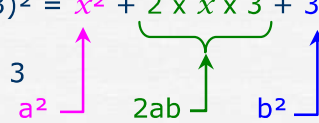
### 1. Le carré d'une somme a et b étant 2 nombres relatifs,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemples :

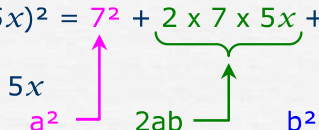
➤  $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = \underline{x^2 + 6x + 9}$

on a ici a = x et b = 3



➤  $(7 + 5x)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 5x + (5x)^2 = \underline{49 + 70x + 25x^2}$

on a ici a = 7 et b = 5x

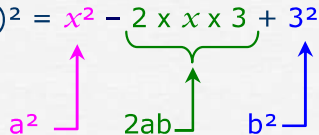


### 2. Le carré d'une différence

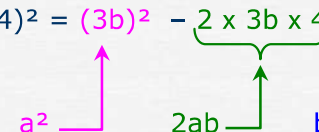
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemples :

➤  $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = \underline{x^2 - 6x + 9}$



➤  $(3b - 4)^2 = (3b)^2 - 2 \times 3b \times 4 + 4^2 = \underline{9b^2 - 24b + 16}$

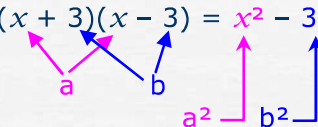


### 3. Le produit d'une somme de 2 nombres par leur différence

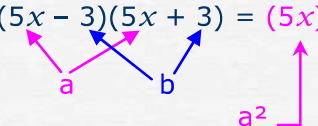
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exemples :

➤  $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2 = \underline{x^2 - 9}$



➤  $(5x - 3)(5x + 3) = (5x)^2 - 3^2 = \underline{25x^2 - 9}$



### 4. Applications au calcul mental :

➤ Calculer mentalement **99<sup>2</sup>**. On peut écrire que 99 = 100 - 1  
Donc  $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2$  comme  $(a - b)^2$   
 $= 10\,000 - 200 + 1 = \mathbf{9801}$

➤ De même **98 x 102** = (100 - 2)(100 + 2) = 100<sup>2</sup> - 2<sup>2</sup> = **9996**  
et **31<sup>2</sup>** = (30 + 1)<sup>2</sup> = 900 + 60 + 1 = **961**

### III Factorisation d'une somme

#### 1. Une transformation déjà connue

Dans le 1<sup>er</sup> exemple du I, nous avons réduit  $4x + 5x - 14x$  en  $-5x$  car  $4 + 5 - 14 = -5$ . Le  $x$  a été **mis en facteur** de la façon suivante  $4x + 5x - 14x = x(4 + 5 - 14) = x(-5) = -5x$



#### 2. Factoriser en reconnaissant un facteur commun

$$ab + ac - ad = a(b + c - d)$$

somme

produit

On factorise une somme pour obtenir un produit

Le **facteur commun a** peut être un **nombre**, une **lettre** ou une **expression entre parenthèses** comme dans les exemples ci-dessous.

Exemples :

	$3x - 6y + 21z =$
On remarque qu'il y a 3 nombres multiples de <b>3</b>	$3x - 3 \times 2y + 3 \times 7z =$
Le nombre 3 devient alors un facteur commun dans chaque terme de la somme.	$3(x - 2y + 7z)$

	$4xy - 3x + x^2 =$
On remarque qu'il y a la lettre <b>x</b> dans chaque terme	$x \times 4y - 3x + x \times x =$
Le nombre <b>x</b> est alors le facteur commun à chaque terme de la somme	$x(4y - 3 + x)$

<b>Vu au brevet</b> →	$(x + 4)(x + 2) - 3(x + 2) =$
Cette somme a 2 termes $(x + 4)(x + 2)$ et $- 3(x + 2)$ . Chaque terme est un produit de 2 facteurs. Le facteur commun est <b><math>(x + 2)</math></b>	$(x + 4)(x + 2) - 3(x + 2) =$
Le nombre <b><math>(x + 2)</math></b> est alors mis en facteur comme <b>a</b> dans $ab - ac = a(b - c)$	$(x + 2)[(x + 4) - 3] =$
Il reste à réduire le 2 <sup>ème</sup> facteur entre les [ ]	$(x + 2)[x + 4 - 3] =$ $(x + 2)(x + 1)$

**Exercices :** Factoriser les expressions suivantes

- $(2x + 1)^2 - (2x + 1)(x + 3)$
- $(x + 6)(3x + 5) + (x + 6)$

#### 3. Factoriser en reconnaissant une identité remarquable

L'expression  $25 + 4x^2 - 20x$  est une somme de 3 termes qui n'ont pas de facteurs communs et pourtant nous allons réussir à la factoriser. Pour cela on remarque qu'elle a un « air de famille » avec  $a^2 + b^2 - 2ab$

$$25 + 4x^2 - 20x$$

$$5^2 + (2x)^2 - 2 \times 5 \times 2x \text{ d'où } (5 - 2x)^2$$

La vérification se fait en développant le produit remarquable  $(5 - 2x)^2$

On peut donc conclure que  $25 + 4x^2 - 20x = (5 - 2x)^2$

A retenir, les identités remarquables dans l'autre sens

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

On factorise

### Exemples :

- $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$   
c'est comme  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$  avec  $a = x$  et  $b = 3$
- $x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$   
c'est comme  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  avec  $a = x$  et  $b = 7$
- $9x^2 - 32x + 25$  ressemble à  $a^2 - 2ab + b^2$  mais  $2ab = 2 \times 3x \times 5 = 30x$  au lieu de  $32x$ . Cela ne convient pas et on ne le factorisera pas.
- $9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$   
c'est comme  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $(x + 2)^2 - 9$  est de la forme  
 $a^2 - b^2$  avec  $a = (x + 2)$  et  $b = 3$  et devient donc  
 $(a + b)(a - b)$  soit  
 $[(x + 2) + 3][(x + 2) - 3]$  puis en réduisant dans les [ ]  
 $[x + 2 + 3][x + 2 - 3] = (x + 5)(x - 1)$
- $16 - (x + 6)^2$  se factorise sur le même modèle que le précédent  
 $= [4 + (x + 6)][4 - (x + 6)]$   
 $= [4 + x + 6][4 - x - 6]$  à noter le changement de signe de  $x + 6$  précédé de -  
 $= (10 + x)(-2 - x)$
- $(3x - 1)^2 - (5x + 4)^2$  est encore sur le même modèle  $a^2 - b^2$   
 $= [(3x - 1) + (5x + 4)][(3x - 1) - (5x + 4)]$   
 $= (3x - 1 + 5x + 4)(3x - 1 - 5x - 4)$   
 $= (8x + 3)(-2x - 5)$
- **Exercice : vu au brevet**  
On considère l'expression  $E = 16x^2 - 25 + (x + 2)(4x + 5)$   
Factoriser  $16x^2 - 25$  puis en déduire la factorisation de E.