Identités remarquables

الأستاذ : ناصر ب.
www.nacermaths.com

I Développer et réduire

Rappel des classes précédentes

Règles générales

distributivité simple $\quad a(b + c - d) = ab + ac - ad$

produit de 2 sommes $\quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Le 1er membre est une expression factorisée (un produit)

Le 2ème membre est une expression développée (une somme)

On développe un produit pour obtenir une somme

Exemples :

Développer et réduire :

On reconnaît 2 « expressions produit » que l'on **développe** avec la 1ère règle on notera que la règle des signes de la multiplication s'applique. On **réduit** les termes « de même unité » Le calcul est terminé, ces 2 derniers termes ne peuvent plus se réduire	$\underbrace{2(x - 2)}$ + 5x − $\underbrace{7(2x + 3)}$ = et $4x - 4 + 5x - 14x - 21 =$ $4x + 5x - 14x - 4 - 21 =$ $\mathbf{-5x - 25}$
On reconnaît un produit de 2 sommes, que l'on **développe** à l'aide de la 2ème règle, en multipliant chaque terme de la 1ère somme par chaque terme de la 2ème. On **réduit** comme précédemment Le calcul est terminé ces 3 termes ne sont plus réductibles.	$(2 - 3x)(x + 5) =$ $2x + 10 - 3x^2 - 15x =$ $2x - 15x + 10 - 3x^2 =$ $\mathbf{-13x + 10 - 3x^2}$

II Développer avec des identités remarquables

Une façon particulière de développer consiste à utiliser 3 identités remarquables

1. Le carré d'une somme

a et b étant 2 nombres relatifs,

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Exemples :

- $(x+3)^2 = \underbrace{x^2}_{a^2} + \underbrace{2 \times x \times 3}_{2ab} + \underbrace{3^2}_{b^2} = \underline{\mathbf{x^2 + 6x + 9}}$

on a ici a = x et b = 3

- $(7+5x)^2 = \underbrace{7^2}_{a^2} + \underbrace{2 \times 7 \times 5x}_{2ab} + \underbrace{(5x)^2}_{b^2} = \underline{\mathbf{49 + 70x + 25x^2}}$

on a ici a = 7 et b = $5x$

2. Le carré d'une différence

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Exemples :

- $(x-3)^2 = \underbrace{x^2}_{a^2} - \underbrace{2 \times x \times 3}_{2ab} + \underbrace{3^2}_{b^2} = \underline{\mathbf{x^2 - 6x + 9}}$

- $(3b-4)^2 = \underbrace{(3b)^2}_{a^2} - \underbrace{2 \times 3b \times 4}_{2ab} + \underbrace{4^2}_{b^2} = \underline{\mathbf{9b^2 - 24b + 16}}$

3. Le produit d'une somme de 2 nombres par leur différence

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Exemples :

- $(\underbrace{x}_{a}+\underbrace{3}_{b})(\underbrace{x}_{a}-\underbrace{3}_{b}) = \underbrace{x^2}_{a^2} - \underbrace{3^2}_{b^2} = \underline{\mathbf{x^2 - 9}}$

- $(\underbrace{5x}_{a}-\underbrace{3}_{b})(\underbrace{5x}_{a}+\underbrace{3}_{b}) = \underbrace{(5x)^2}_{a^2} - \underbrace{3^2}_{b^2} = \underline{\mathbf{25x^2 - 9}}$

4. Applications au calcul mental :

- Calculer mentalement **99^2.** On peut écrire que 99 = 100 – 1

Donc $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2$ *comme $(a-b)^2$*

$= 10\,000 - 200 + 1 =$ **9801**

- De même **98×102** $= (100-2)(100+2) = 100^2 - 2^2 =$ **9996**
- et **31^2** $= (30+1)^2 = 900 + 60 + 1 =$ **961**

III Factorisation d'une somme

1. Une transformation déjà connue

Dans le 1[er] exemple du I, nous avons réduit $4x + 5x - 14x$ en $-5x$ car $4 + 5 - 14 = -5$. Le x a été mis en facteur de la façon suivante

$4x + 5x - 14x = x(4 + 5 - 14) = x(-5) = -5x$

2. Factoriser en reconnaissant un facteur commun

$$\boxed{\underbrace{ab + ac - ad}_{\text{somme}} = \underbrace{a(b + c - d)}_{\text{produit}}}$$

On factorise une somme pour obtenir un produit

Le **facteur commun a** peut être un **nombre**, une **lettre** ou une **expression entre parenthèses** comme dans les exemples ci-dessous.
Exemples :

	$3x - 6y + 21z =$
On remarque qu'il y a 3 nombres multiples de **3**	$3x - 3 \times 2y + 3 \times 7z =$
Le nombre 3 devient alors un facteur commun dans chaque terme de la somme.	$3(x - 2y + 7z)$

	$4xy - 3x + x^2 =$
On remarque qu'il y a la lettre x dans chaque terme	$x \times 4y - 3x + x \times x =$
Le nombre x est alors le facteur commun à chaque terme de la somme	$x(4y - 3 + x)$

Vu au brevet →	$(x + 4)(x + 2) - 3(x + 2) =$
Cette somme a 2 termes $(x + 4)(x + 2)$ et $-3(x + 2)$. Chaque terme est un produit de 2 facteurs. Le facteur commun est $\mathbf{(x + 2)}$	$(x + 4)\mathbf{(x + 2)} - 3\mathbf{(x + 2)} =$
Le nombre $\mathbf{(x + 2)}$ est alors mis en facteur comme **a** dans **a**b − **a**c = **a**(b − c)	$(x + 2)[(x + 4) - 3] =$
Il reste à réduire le 2[ème] facteur entre les [ ]	$(x + 2)[x + 4 - 3] =$ $\mathbf{(x + 2)(x + 1)}$

Exercices : Factoriser les expressions suivantes

- $(2x + 1)^2 - (2x + 1)(x + 3)$
- $(x + 6)(3x + 5) + (x + 6)$

3. Factoriser en reconnaissant une identité remarquable

L'expression $25 + 4x^2 - 20x$ est une somme de 3 termes qui n'ont pas de facteurs communs et pourtant nous allons réussir à la factoriser. Pour cela on remarque qu'elle a un « air de famille » avec $a^2 + b^2 - 2ab$

$25 + 4x^2 - 20x$

$5^2 + (2x)^2 - 2 \times 5 \times 2x$ d'où $(5 - 2x)^2$

La vérification se fait en développant le produit remarquable $(5 - 2x)^2$
On peut donc conclure que $\mathbf{25 + 4x^2 - 20x = (5 - 2x)^2}$
A retenir, les identités remarquables dans l'autre sens

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

On factorise

Exemples :

- $x^2 + 6x + 9 = \mathbf{(x+3)^2}$
  c'est comme $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$

- $x^2 - 49 = \mathbf{(x+7)(x-7)}$
  c'est comme $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ avec $a = x$ et $b = 7$

- $9x^2 - 32x + 25$ ressemble à $a^2 - 2ab + b^2$ mais $2ab = 2 \times 3x \times 5 = 30x$ au lieu de $32x$. Cela ne convient pas et on ne le factorisera pas.

- $9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$
  c'est comme $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

- $(x+2)^2 - 9$ est de la forme
  $a^2 - b^2$ avec $a = (x+2)$ et $b = 3$ et devient donc
  $(a+b)(a-b)$ soit
  $[(x+2)+3][(x+2)-3]$ puis en réduisant dans les [ ]
  $[x+2+3][x+2-3] = \mathbf{(x+5)(x-1)}$

- $16 - (x+6)^2$ *se factorise sur le même modèle que le précédent*
  $= [4 + (x+6)][4 - (x+6)]$
  $= [4 + x + 6][4 - x - 6]$ *à noter le changement de signe de $x + 6$ précédé de –*
  $= (10 + x)(-2 - x)$

- $(3x-1)^2 - (5x+4)^2$ *est encore sur le même modèle $a^2 - b^2$*
  $= [(3x-1) + (5x+4)][(3x-1) - (5x+4)]$
  $= (3x - 1 + 5x + 4)(3x - 1 - 5x - 4)$
  $= \mathbf{(8x+3)(-2x-5)}$

- **Exercice : vu au brevet**
  On considère l'expression $E = 16x^2 - 25 + (x+2)(4x+5)$
  Factoriser $16x^2 - 25$ puis en déduire la factorisation de E.