الترتيب و العمليات

الأستاذ : ناصر ب.
www.nacermaths.com

I _ مقارنة عددين حقيقيين :

1) – قاعدة ① :

a و b عددان حقيقيان .
إذا كان $a-b \le 0$ فإن $a \le b$
إذا كان $a-b \ge 0$ فإن $a \ge b$

2) – أمثلة :

1) -- لنقارن العددين : $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-5$

لدينا :

$$\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right)=2\sqrt{2}-4-\sqrt{3}+5$$
$$=2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5-4$$
$$=\sqrt{3}+1$$

و بما أن : $\sqrt{3}+1 \ge 0$ فإن : $\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right) \ge 0$

و منه فإن : $2\sqrt{3}-4 \ge \sqrt{3}-5$

2) -- لنقارن العددين : x و y بحيث : $x=y-3$.

لدينا : $x-y=-3$

و بما أن : $-3 \le 0$ فإن : $x-y \le 0$.

و منه فإن : $x \le y$

II _ الترتيب و العمليات :

1) – الترتيب و الجمع :

أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .
إذا كان $a \le b$ فإن
$a+c \le b+c$

* مثال :

نعتبر x عددا حقيقيا بحيث : $x<3$.
لنقارن العددين -2 و $x-5$.

لدينا : $x<3$

يعني أن :

$$x+(-5)<3+(-5)$$
$$x-5<3-5$$

و بالتالي فإن : $x-5<-2$

ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

إذا كان و $\left.\begin{matrix} a\leq b \\ c\leq d \end{matrix}\right\}$ فإن $a+c\leq b+d$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x<3$ و $2>y$.
لنبين أن : $x+y<5$.

لدينا : $\left.\begin{matrix} x<3 \\ 2>y \end{matrix}\right\}$ يعني أن : $\left.\begin{matrix} x<3 \\ y<2 \end{matrix}\right\}$

إذن : $x+y<2+3$

و باتالي فإن : $x+y<5$

2) – الترتيب و الضرب :

أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .
إذا كان $a\leq b$ و $c>0$ فإن $a\times c\leq b\times c$
إذا كان $a\leq b$ و $c<0$ فإن $a\times c\geq b\times c$
إذا كان $a\times c\leq b\times c$ و $c>0$ فإن $a\leq b$
إذا كان $a\times c\geq b\times c$ و $c<0$ فإن $a\leq b$

* مثال :

لدينا : $11\leq 27$ يعني أن $11\times 5\leq 27\times 5$
$11\leq 27$ يعني أن $11\times(-4)\geq 27\times(-4)$

ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

إذا كان $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array}\right\}$ و فإن $a \times c \leq b \times d$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان موجبان بحيث : $x < \sqrt{3}$ و $y < 2\sqrt{6}$.

لنبين أن : $xy < 6\sqrt{3}$.

لدينا :

$\left.\begin{array}{l} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{array}\right\}$ و يعني أن :

$$x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$$
$$xy < 2\sqrt{3 \times 6}$$
$$xy < 2\sqrt{18}$$
$$xy < 2\sqrt{9 \times 2}$$
$$xy < 2\sqrt{3^2 \times 2}$$
$$xy < 2 \times 3\sqrt{2}$$

وبالتالي فإن : $xy < 6\sqrt{2}$

3) – الترتيب و المقلوب :

أ) -- خاصية :

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا .

إذا كان $a \leq b$ فإن $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

إذا كان $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ فإن $a \leq b$

ب) -- مثال :

لدينا : $7 \leq 13$ يعني أن $\frac{1}{7} \geq \frac{1}{13}$

$11 \geq 5$ يعني أن $\frac{1}{11} \leq \frac{1}{5}$

4) – الترتيب و المربع :

أ) -- خاصية ① :

a و b عددان حقيقيان موجبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$
إذا كان $a^2 \leq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$5 \leq 11$ يعني أن $5^2 \leq 11^2$ أي $25 \leq 121$.

ب) -- خاصية ② :

a و b عددان حقيقيان سالبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \geq b^2$
إذا كان $a^2 \geq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$-7 \leq -2$ يعني أن $(-7)^2 \geq (-4)^2$ أي $49 \geq 16$

5) – الترتيب و الجذر المربع :

أ) -- خاصية :

a و b عددان حقيقيان موجبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
إذا كان $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ فإن $a \leq b$

* أمثلة :

1) – لنقارن العددين : $\sqrt{10}$ و $3\sqrt{3}$.

لدينا :

و $\left.\begin{matrix} \sqrt{10}^2 = 10 \\ \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27 \end{matrix}\right\}$ إذن $\sqrt{10}^2 \leq \left(3\sqrt{3}\right)^2$ و منه فإن $\sqrt{10} \leq 3\sqrt{3}$

2) – لنقارن العددين : $-\sqrt{6}$ و $-3\sqrt{2}$.

لدينا :

و $\left.\begin{matrix} \sqrt{6}^2 = 6 \\ \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 \end{matrix}\right\}$ إذن $\sqrt{6}^2 \leq \left(3\sqrt{2}\right)^2$ و منه فإن $\sqrt{6} \leq 3\sqrt{2}$. و بالتالي فإن : $-\sqrt{6} \geq -3\sqrt{2}$

III _ التأطيـر :

1) – تأطيـر مجموع عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :
$x \le a \le y$ و $z \le b \le t$
$$x + z \le a + b \le y + t$$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 8$ و $-4 \le y \le 2$
لنؤطر $x + y$.

لدينا :
$$3 + (-4) \le x + y \le 8 + 2$$

إذن : $-1 \le x + y \le 10$

2) – تأطيـر مقابل عدد حقيقي :

a عدد حقيقي بحيث : $x \le a \le y$
سيكون لدينا : $-y \le -a \le -x$

3) – تأطيـر فرق عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :
$x \le a \le y$ و $z \le b \le t$
$$x - t \le a - b \le y - z$$

* ملاحظة هامة : لتأطير $a - b$ ، نضع : $a - b = a + (-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 8$ و $-4 \le y \le 2$
لنؤطر $x - y$.

لدينا :
$$-2 \le -y \le 4 \quad \text{و} \quad 3 \le x \le 8$$

إذن : $3 - 2 \le x + (-y) \le 8 + 4$

و منه فإن : $1 \le x - y \le 12$

4) – تأطيـر جداء عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة بحيث :
$z \leq b \leq t$ و $x \leq a \leq y$
$x \times z \leq a \times b \leq y \times t$

*** مثال 1 :**

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 7$ و $1 \leq y \leq 3$
لنؤطـر $x \times y$.

لدينا :
$$3 \times 1 \leq x \times y \leq 7 \times 3$$
إذن : $3 \leq x \times y \leq 21$

*** مثال 2 :**

x و y عددان حقيقيان بحيث : $-5 \leq x \leq -2$ و $3 \leq y \leq 6$
لنؤطـر $x \times y$.

لدينا :
$$2 \leq -x \leq 5$$
إذن :
$$2 \times 3 \leq (-x) \times y \leq 5 \times 6 \quad \text{أي} \quad 6 \leq -xy \leq 30$$
و منه فإن : $-30 \leq xy \leq -6$.

5) – تأطيـر مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

a و x و y أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $x \leq a \leq y$
سيكون لدينا : $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{x}$

6) – تأطيـر خارج عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث : $b \neq 0$ و $z \neq 0$ و $t \neq 0$
و $x \leq a \leq y$ و $z \leq b \leq t$
سيكون لدينا $\frac{x}{t} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{y}{z}$

*** ملاحظة هامة :** لتأطير $\frac{a}{b}$ ، نضع : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 7$ و $5 \le y \le 9$

لنؤطر $\frac{x}{y}$.

لدينا :

$$\frac{1}{9} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{5}$$

إذن :

$$3 \times \frac{1}{9} \le x \times \frac{1}{y} \le 7 \times \frac{1}{5} \quad \text{أي} \quad \frac{3}{9} \le \frac{x}{y} \le \frac{7}{5}$$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{3} \le \frac{x}{y} \le \frac{7}{5}$

* تمرين تطبيقي :

a و b و c أعداد حقيقية بحيث :

$6 \le a \le 8$ و $-4 \le b \le -2$ و $-3 \le c \le 5$

أطـر : a^2 و b^2 و $a+2b-4c$ و $\frac{a+b}{b^2}$

الحـل :

1) – تأطير a^2 .

لدينا : $6^2 \le a^2 \le 8^2$ و منه فإن : $36 \le a^2 \le 64$

2) – تأطير b^2 .

لدينا : $(-2)^2 \le b^2 \le (-4)^2$ و منه فإن : $4 \le b^2 \le 16$

3) – تأطير $a+2b-4c$.

لدينا : $-8 \le 2b \le -4$

و $-4 \times (-3) \le -4c \le -4 \times 5$ أي $12 \le -4c \le 20$

إذن : $6+(-8)+12 \le a+2b-4c \le 8+(-4)+20$

و منه فإن : $10 \le a+2b-4c \le 24$

4) – تأطير $\frac{a+b}{b^2}$.

لدينا : $6+(-4) \le a+b \le 8+(-2)$ أي $2 \le a+b \le 6$

و $\frac{1}{16} \le \frac{1}{b^2} \le \frac{1}{4}$

إذن : $2 \times \frac{1}{16} \le (a+b) \times \frac{1}{b^2} \le 6 \times \frac{1}{4}$ أي $\frac{2}{16} \le \frac{a+b}{b^2} \le \frac{6}{4}$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{8} \le \frac{a+b}{b^2} \le \frac{3}{2}$