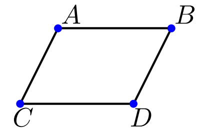
Les vecteurs dans le plan

1 Translation et vecteurs

Découverte : voir le cahier d'exercices.

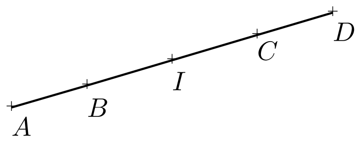
Soient A et B deux points du plan.
La translation du plan qui transforme A en B associe à tout point C l'unique point D tel que les segments $[AD]$ et $[BC]$ aient le même milieu.

Premier cas : $C \notin (AB)$



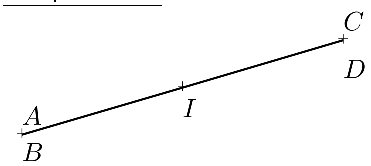
D est donc l'unique point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Deuxième cas : $C \in (AB)$



On dit que $ABDC$ est un parallélogramme aplati.

Cas particulier : $A = B$



On constate que si la translation qui transforme A en B transforme C en D, alors :
- $(AB) /\!/ (CD)$ c'est-à-dire que les droites (AB) et (CD) ont la même direction ;
- $AB = CD$;
- le sens de A vers B est le même que celui de C vers D.

Ces trois propriétés caractérisent cette translation.
On dit alors que la translation qui transforme A en B est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

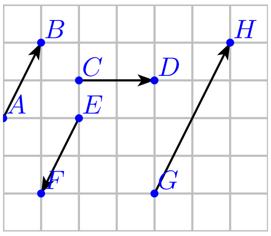
2 Egalité de deux vecteurs

2.1 Définition

Deux points A et B pris dans cet ordre définissent un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$.
- Lorsque $A \neq B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
  1. sa direction : celle de la droite (AB) ;
  2. son sens : de A vers B ;
  3. sa longueur : AB.
- Lorsque $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$.

Dans tous les cas, la longueur AB est appelée la norme de $\overrightarrow{AB}$ et est notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.
Le point A est appelé l'origine de $\overrightarrow{AB}$ et le point B son extrémité.

Remarques : $\|\overrightarrow{0}\| = 0$ et $\overrightarrow{0}$ n'a pas de direction ni de sens.
Exemples : Sur le graphique ci-dessous, quels sont les vecteurs de même direction ? De même sens ? De même norme ?

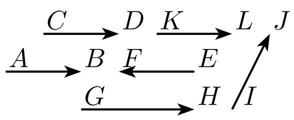


2.2 Egalité de vecteurs

Propriétés sur l'égalité de vecteurs :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, même sens et même norme
$\Leftrightarrow$ $ABDC$ est un parallélogramme
$\Leftrightarrow$ $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu
$\Leftrightarrow$ D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

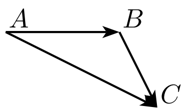
Exemple : Citer les vecteurs égaux de la figure ci-dessous.



Compléter et justifier :
– $\overrightarrow{AB} \ldots \overrightarrow{EF}$ car
– $\overrightarrow{AB} \ldots \overrightarrow{GH}$ car
– $\overrightarrow{AB} \ldots \overrightarrow{IJ}$ car
Notation : On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{KL}$. On pose alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{KL}$.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont des représentants du vecteur $\overrightarrow{u}$.
Question : Combien un vecteur a-t-il de représentants ?

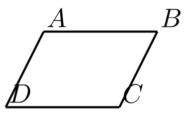
3 Somme de vecteurs

3.1 La relation de Chasles



La relation de Chasles dit : $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$

3.2 La règle du parallélogramme



$\boxed{ABCD \text{ parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}}$

3.3 Propriétés

Pour tous $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ vecteurs du plan, on a :

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$;
2. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$;
3. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$. On dit que le vecteur nul est neutre pour l'addition.

3.4 Différence de deux vecteurs

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. On écrit alors que $\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$ et on dit que $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Deux vecteurs opposés et non nuls ont :

1. même direction,
2. sens contraire,
3. même norme.

On peut alors définir la différence de deux vecteurs : on appelle différence des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur, noté $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, défini par $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$.
Pour construire le vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, il faut commencer par tracer le vecteur $-\overrightarrow{v}$ puis construire la somme $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$.

4 Produit d'un vecteur par un réel

4.1 Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et soit k un réel.
Le produit du réel k avec le vecteur $\overrightarrow{u}$ est le vecteur, noté $k\overrightarrow{u}$, défini comme suit :
– Si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
– Si $k > 0$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors $k\overrightarrow{u}$ a :

1. même direction que $\overrightarrow{u}$;

2. même sens que $\overrightarrow{u}$;
3. $\|k\overrightarrow{u}\| = k\|\overrightarrow{u}\|$.

– Si $k < 0$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors $k\overrightarrow{u}$ a :
1. même direction que $\overrightarrow{u}$;
2. sens contraire à $\overrightarrow{u}$;
3. $\|k\overrightarrow{u}\| = -k\|\overrightarrow{u}\|$.

Exemple : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur tel que $\|\overrightarrow{u}\| = 4$. Quel est le sens, la direction et la norme de $2\overrightarrow{u}$? de $\dfrac{-3}{4}\overrightarrow{u}$?

4.2 Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et a et b deux réels. Alors :
1. $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$;
2. $(a+b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$;
3. $a(b\overrightarrow{u}) = (ab)\overrightarrow{u}$;
4. $a\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow a = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Exemples : $2\overrightarrow{u} + 5\overrightarrow{u} = 7\overrightarrow{u}$; $3(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = 3\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$; $2(5\overrightarrow{v}) = 10\overrightarrow{v}$.

4.3 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

5 Applications

5.1 Parallélisme

Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
$(AB)//(CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Conséquence : Soient A, B et C trois points distincts du plan.

A, B et C alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

5.2 Milieu d'un segment

Soient A et B deux points distincts du plan. Alors :

$$\begin{array}{lcc} I = \text{milieu de } [AB] & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \end{array}$$

6 Vecteurs dans le plan repéré

6.1 Repère orthonormal (ou orthonormé)

Dans un quadrillage du plan à mailles carrées, on choisit un point O, puis deux points I et J tels que OIJ soit un triangle rectangle isocèle en O.
On pose $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$.

On dit que le plan est muni du repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Si le triangle OIJ est rectangle mais n'est pas isocèle, on dit que le plan est muni du repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, soit M le point de coordonnées $(x;y)$. On peut écrire $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
De même, le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(a;b)$ peut s'écrire $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

6.2 Opérations sur les vecteurs

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.
Egalité de vecteurs :

Soients $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a^{'};b^{'})$ deux vecteurs du plan.
$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow a = a^{'}$ et $b = b^{'}$.

Calculs de coordonnées :

1. Soients $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan.
   Alors $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A;y_B - y_A)$.
2. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_B - y_A}{2})$.
3. Soients $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a^{'};b^{'})$ deux vecteurs du plan et soit k un réel. Alors $\vec{u} + \vec{v}(a + a^{'};b + b^{'})$ et $k\vec{u}(ka;kv)$.

Exemple : Soients $\vec{u}(-4;3)$ et $\vec{v}(1;-2)$ deux vecteurs du plan et soit $A(5;3)$ un point du plan.
Déterminer les points $M(x;y)$ tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + 2\vec{v}$.

6.3 Condition de colinéarité

Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1. $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(1;6)$?
2. $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(4;6)$?