Calculs de puissances

الأستاذ : ناصر ب.
www.nacermaths.com

Objectifs

- Comprendre les notations a^n et a^{-n} et savoir les utiliser sur des exemples numériques, pour des exposants très simples et pour des égalités telles que : $a^2 \times a^3 = a^5$; $(ab)^2 = a^2b^2$; $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$ où a et b sont des nombres relatifs non nuls.
- Utiliser sur des exemples numériques les égalités : $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$; $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$; $(10^m)^n = 10^{m\times n}$ où m et n sont des entiers relatifs.

1 Notation a^n avec a un nombre entier relatif

Définition (a^n)

Pour écrire $\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$, on note « a^n ».

Exemple : $3^2 = 3 \times 3 = 9$,
$(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$.

Définition (10^n)

Pour écrire $\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ facteurs}}$, on note « 10^n ».

Exemple : $10^2 = 10 \times 10 = 100$,
$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$.

2 Multiplication

Théorème

Quels que soient les nombres entiers m et n, on a

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Exemple : $2^3 \times 2^4 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{2^4} = 2^7$

Théorème

Quels que soient les nombres entiers m et n, on a

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}.$$

Exemple : $10^3 \times 10^2 = 1\,000 \times 100 = 100\,000 = 10^5$.

3 Puissance 0

Théorème

Par convention, on pose $a^0 = 1$.

Théorème

Par convention, on pose $10^0 = 1$.

Démonstration : La règle de multiplication pour les nombres strictement positifs, étendue au nombre 0 implique que $a^n \times a^0 = a^{n+0} = a^n$.
Ainsi, a^0 vaut obligatoirement 1 car $a^n \times 1 = a^n$. ∎

4 Puissance négative

Théorème

$$\text{On note} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Théorème

$$\text{On note} \quad 10^{-n} = \frac{1}{10^n}.$$

Démonstration : La règle de multiplication pour les nombres strictement positifs, étendue aux nombre négatifs implique $a^n \times a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^{n-n} = a^0 = 1$.
Donc, a^{-n} est l'inverse de a^n. ∎

Exemple : $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0,125$.
$10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1\,000} = 0,001$.

5 Division

Théorème

Quels que soient les entiers relatifs m et n,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Exemple : $\dfrac{2^2}{2^5} = 2^{2-5} = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0,125.$

Théorème

Quels que soient les entiers relatifs m et n,

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}.$$

Exemple : $\dfrac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3 = 1\,000.$

6 Puissance de puissance

Théorème

a, m et n étant des entiers relatifs, on

$$(a^m)^n = a^{m\times n}.$$

Exemple : $(3^2)^3 = 3^{2\times 3} = 3^6.$

Théorème (Pour les puissances de 10)

Soient m et n deux entiers relatifs, on a

$$(10^m)^n = 10^{m\times n}.$$

Exemple : $(10^{-2})^3 = 10^{-2\times 3} = 10^{-6}.$

Démonstration : on choisit m et n positifs puis on décompose.

$$\begin{aligned}
(10^m)^n &= \underbrace{10^m \times 10^m \times \cdots \times 10^m}_{\text{n facteurs}} \\
&= \underbrace{\overbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}^{m \text{ facteurs}} \times \cdots \times \overbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}^{m \text{ facteurs}}}_{n\times m \text{ facteurs}} \\
&= \underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{m\times n \text{ facteurs}} \\
(10^m)^n &= 10^{m\times n}.
\end{aligned}$$

Le résultat est prouvé pour m et n positifs. ∎