

اتصال دالة عددية

القدرات المنتظرة

. تحديد صورة قطعة أو مجال : * بدالة متصلة؛ * بدالة متصلة و رتيبة؛

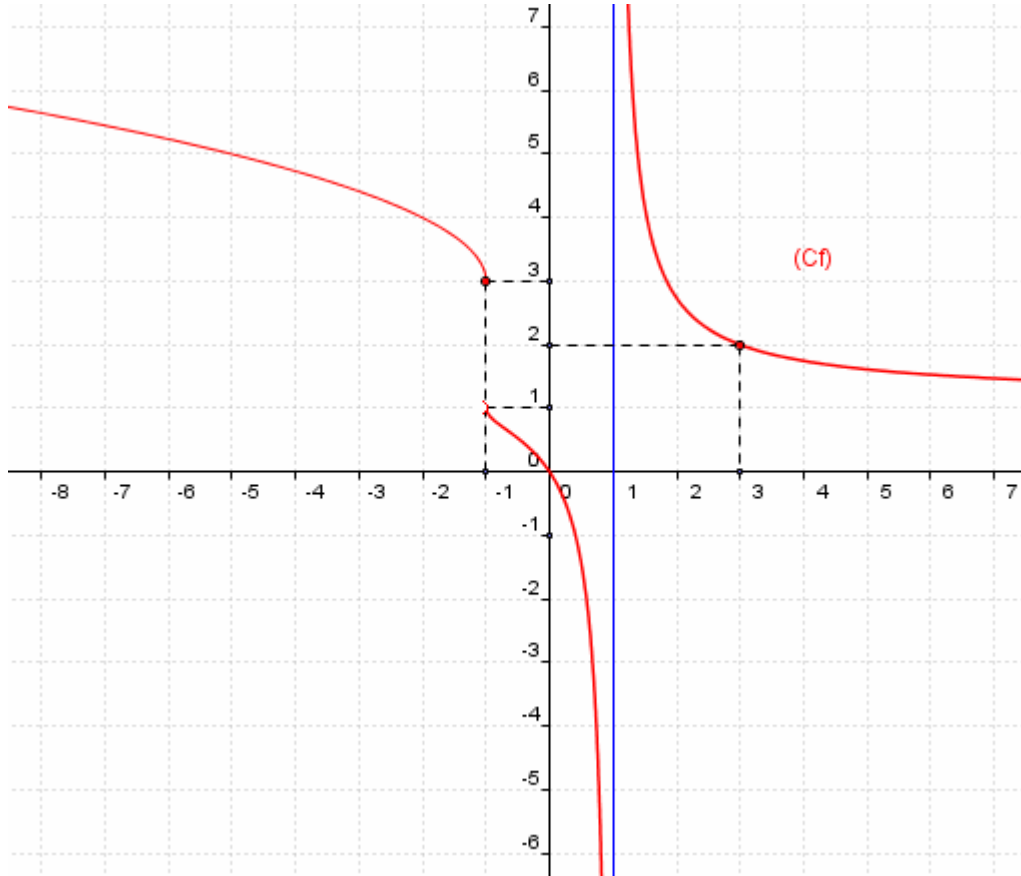
. تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة في دراسة بعض المعادلات و المتراجحات أو دراسة إشارة بعض التعابير.....

. استعمال التفرع الثنائي في تحديد قيم مقربة لحلول $f(x) = \lambda$ أو لتأطير هذه الحلول؛

. تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة في حالة دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال، لاثبات وحدانية حل المعادلة $f(x) = \lambda$.

I- الاتصال في نقطة - الاتصال على مجال 1- الاتصال في نقطة a / نشاط

ليكن (C_f) منحنى دالة عددية f كما في الشكل التالي:



1- من خلا الشكل كيف ترى المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الافصول -1 ثم عند النقطة ذات 3

2- أ/ أحسب $f(3)$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ماذا تلاحظ

ب/ أحسب $f(-1)$ و أدرس نهاية f عند -1 ماذا تستنتج

الجواب:

1/ من خلال شكل المنحنى (C_f) يتضح ان المنحنى متقطع عند النقطة ذات الافصول -1

و متصل عند النقطة ذات 3

2/ أ- من خلال شكل المنحنى (C_f) لدينا $f(3) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

نلاحظ أن $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ لذا نقول إن الدالة f متصلة عند النقطة 3

ب- من خلال شكل المنحنى (C_f) لدينا $f(-1) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$

نلاحظ أن: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ -* نقول إن الدالة f غير متصلة عند -1

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$ -* نقول إن الدالة f متصلة على اليمين عند النقطة -1

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq f(-1)$ -* نقول إن الدالة f غير متصلة على اليسار عند النقطة -1

b/ تعريف الاتصال

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I ، و x_0 عنصرا من I
تكون f متصلة في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

تعريف الاتصال على اليمين الاتصال على اليسار في نقطة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على مجال من نوع $[x_0; x_0 + \alpha[$ حيث $\alpha > 0$
تكون f متصلة على اليمين في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على مجال من نوع $]x_0 - \alpha; x_0]$ حيث $\alpha > 0$
تكون f متصلة على اليسار في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I ، و x_0 عنصرا من I
تكون f متصلة في النقطة x_0 إذا وفقط f متصلة على اليمين و على اليسار في النقطة x_0

تمرين

1- أدرس اتصال f في x_0 في الحالات التالية :

$$x_0 = 2 ; \begin{cases} f(x) = 2x + 1 & x > 2 \\ f(x) = x^2 - 1 & x \leq 2 \end{cases} /b \quad x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = \frac{\sin 3x}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases} /a$$

$$x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ f(x) = x^2 - x & x \leq 0 \end{cases} /c$$

2- حدد a لكي تكون f متصلة في -1
 $\begin{cases} f(x) = x^3 + ax & x > -1 \\ f(x) = -x + 1 & x \leq -1 \end{cases}$

2- الاتصال في مجال

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال مفتوح I
تكون f متصلة على I إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من I

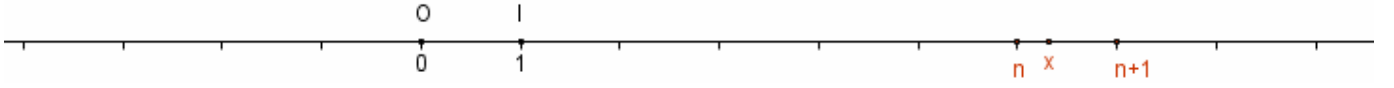
لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $[a; b]$
تكون f متصلة على $[a; b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a; b[$ ومتصلة على اليمين a ومتصلة على اليسار b

بالمثل نعرف الاتصال على $]a; b[$ و على $]a; b[$ و $]-\infty; a]$ و على $]a; +\infty[$
ملاحظة التمثيل المبياني لدالة متصلة على $[a; b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتين اللتين إحداثيتهما $(a; f(a))$ و $(b; f(b))$

3- اتصال دوال اعتيادية خاصية

الدوال الحدودية و الدوال الجدرية و الدوال $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \tan x$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها

4- دالة الجزء الصحيح



لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح نسبي وحيد n حيث $n \leq x < n+1$
العدد الصحيح النسبي n يسمى الجزء الصحيح للعدد x

تعريف

دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي تربط كل عنصر x من \mathbb{R} بجزئه الصحيح
نرمز لصورة x بهذه الدالة بالرمز $E(x)$ أو بالرمز $[x]$

$$E(x) = n \Leftrightarrow \exists ! n \in \mathbb{Z} \quad n \leq x < n+1$$

أمثلة

$$-3 \leq -2,1 < -2 \quad E(-2,1) = -3$$

$$3 \leq 3,7 < 4 \quad E(3,7) = 3$$

$$-4 \leq -4 < -5 \quad E(-4) = -4$$

$$1 \leq \sqrt{2} < 2 \quad E(\sqrt{2}) = 1$$

التمثيل المبياني لدالة الجزء الصحيح

$$\forall x \in [n; n+1[\quad E(x) = n$$

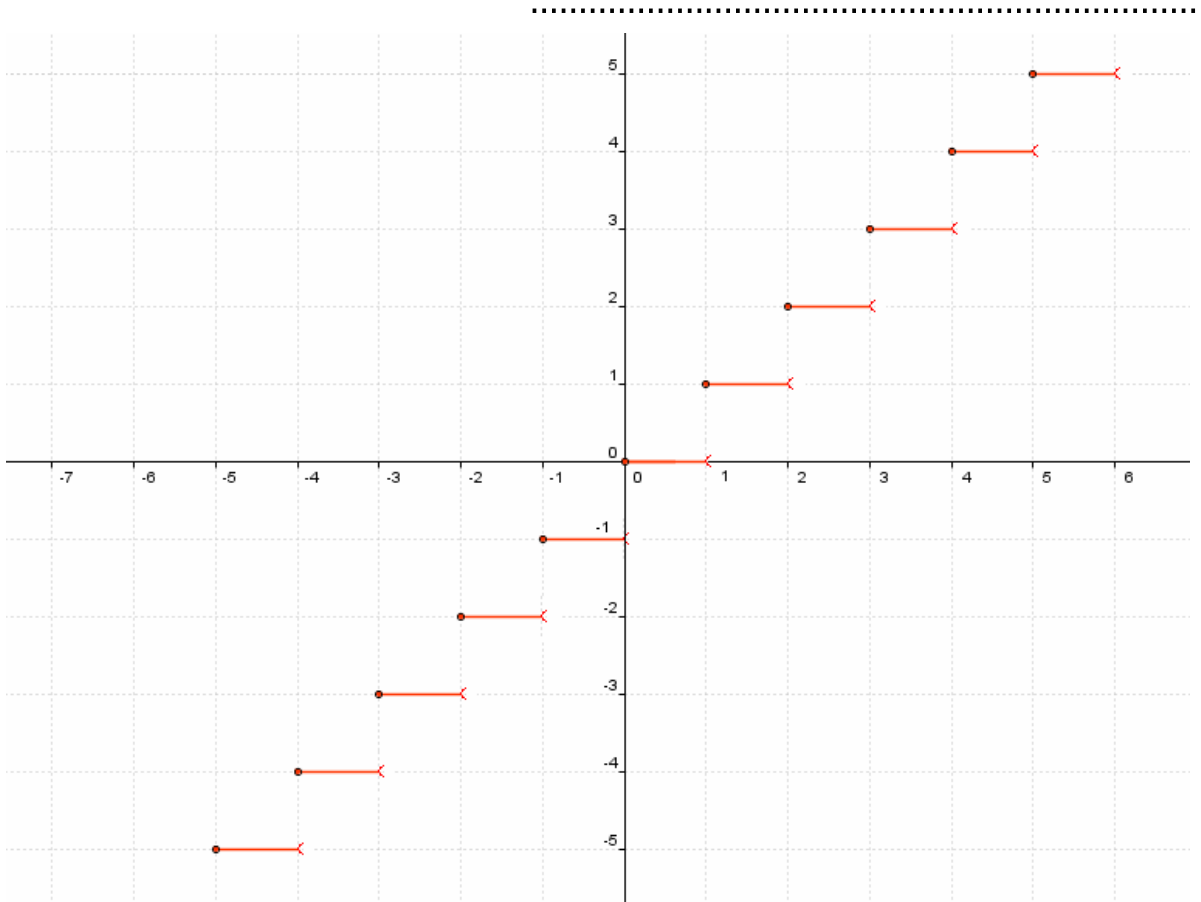
ليكن $n \in \mathbb{Z}$

$$E(x) = -1 \quad \text{إذا كان } x \in [-1; 0[$$

$$E(x) = 0 \quad \text{فان } x \in [0; 1[$$

$$E(x) = -2 \quad \text{فان } x \in [-2; -1[$$

$$E(x) = 1 \quad \text{فان } x \in [1; 2[$$



نتائج

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad E(n) = n \quad -*$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x) \leq x < E(x) + 1 \quad -*$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad E(x+n) = E(x) + n \quad -*$$

ليكن $n \in \mathbb{Z}$

-* دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في n و غير متصل على اليسار في n

-* دالة الجزء الصحيح متصلة على $[n; n+1[$

-* دالة الجزء الصحيح غير متصلة في n

5- قصور دالة

تعريف

إذا كانت f دالة عددية معرفة على مجال I و g دالة عددية معرفة على مجال J ضمن I

بحيث $\forall x \in J \quad g(x) = f(x)$ فاننا نقول ان الدالة g قصور الدالة f على المجال J

نتيجة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g قصور الدالة f على المجال J فان g متصلة على

المجال J

تمرين لتكن f دالة عددية معرفة على $[-1; +\infty[$ بما يلي :

$$\text{بين أن الدالة } f \text{ متصلة على المجال } [-1; +\infty[\quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & x > 1 \\ f(x) = \frac{3x^2}{x+2} & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

-* الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على حيز تعريفها $[0; +\infty[$ و $]1; +\infty[\subset [0; +\infty[$

ومنه الدالة f متصلة على $]1; +\infty[$

-* الدالة $x \mapsto \frac{3x^2}{x+2}$ متصلة على كل مجال ضمن $\mathbb{R} - \{-2\}$ لأنها دالة حدودية و $]1; +\infty[\subset \mathbb{R} - \{-2\}$

ومنه الدالة f متصلة على $[-1; 1[$

-* لندرس اتصال f في 1

$$\text{لدينا } f(1) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2}{x+2} = 1$$

$$\text{إذن } f \text{ متصلة في } 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

إذن f متصلة على $[-1; +\infty[$

II- العمليات على الدوال المتصلة

1- خاصية (تقبل)

إذا كانتا f و g دالتين متصلتين على مجال I و α عددا حقيقيا فان:

-* $f+g$ و αf و $f \times g$ متصلة على I

-* و إذا كانت g لا تنعدم على المجال I فان الدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتان على مجال I

تمرين

حدد مجموعة تعريف الدالة f و أدرس اتصالها على D_f في الحالات التالية

$$\text{أ- } f(x) = x^2 + \sin(x) \quad \text{ب- } f(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{x+1} \quad \text{ج- } f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$$

2- اتصال مركب دالتين

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J حيث $f(I) \subset J$ إذا كانت f متصلة على I و g دالة متصلة على J فان $g \circ f$ متصلة على I .

تمرين :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x) = \cos(3x^2 - 2x)$

(1) حدد D_f .

(2) اكتب f على شكل مركب دالتين. ثم أدرس اتصال الدالة f على D_f .

نتيجة: f موجبة ومتصلة على مجال I

$f(I) \subset [0; +\infty[$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $[0; +\infty[$

اذن \sqrt{f} متصلة على مجال I لان $\sqrt{f} = \sqrt{\circ} f$

إذا كانت f موجبة ومتصلة على مجال I فان دالة \sqrt{f} متصلة على مجال I

III- صورة مجال بدالة متصلة

1- صورة قطعة - صورة مجال

نشاط نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x) = x^2$

و (C_f) منحناها في معلم متعامد و ممنظم (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1- انشئ (C_f) .

2- حدد مبيانيا صور كل من المجالات : $[0; 2]$; $[-1; 2]$; $[-1; 2]$; $[-1; 0]$; $[0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$

خاصية

* صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.

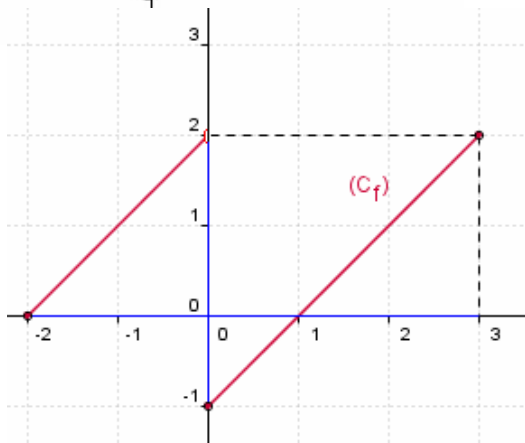
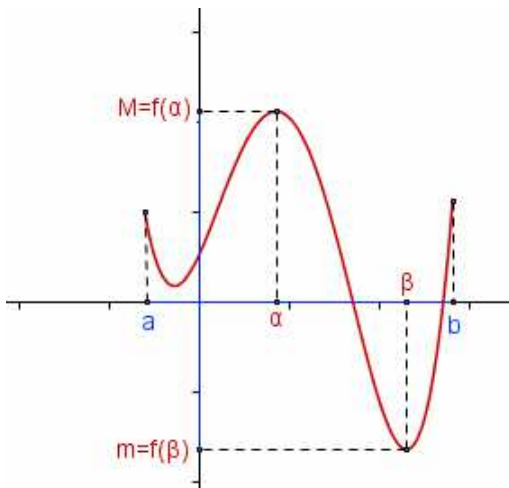
* صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

ملاحظة

* إذا كانت f متصلة على $[a; b]$ فانه يوجد α و β من $[a; b]$

حيث $m = f(\beta) = \inf_{x \in [a; b]} (f(x))$ (القيمة الدنيا)

و $M = f(\alpha) = \sup_{x \in [a; b]} (f(x))$ (القيمة القصوى) $f([a; b]) = [m; M]$



* إذا كان I مجالا من \mathbb{R} و $f(I)$ ليس مجالا

من \mathbb{R} فان f غير متصلة على I

* في الخاصية الشرط f متصلة شرط كاف

و لكن غير لازما أي يمكن أن تكون صورة

مجال بدالة غير متصلة هي مجال

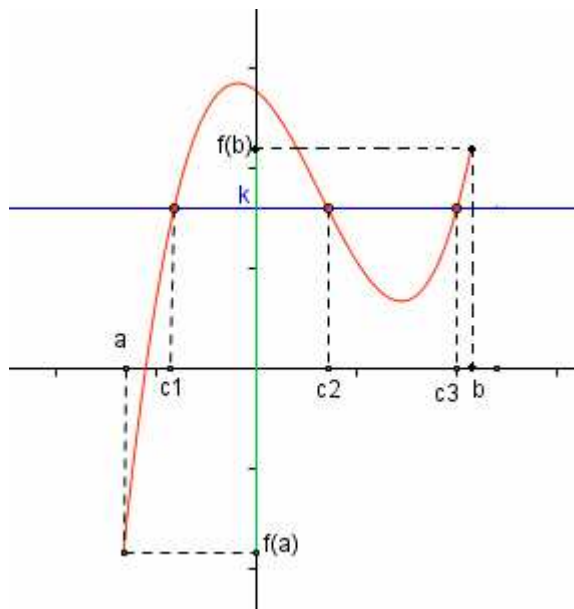
مثال نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $[-2; 3]$

$$\begin{cases} f(x) = x + 2 & x \in [-2; 0[\\ f(x) = x - 1 & x \in [0; 3] \end{cases}$$

مع ذلك $f([-2; 3]) = [-1; 2]$ غير متصلة على $[-2; 3]$

لأنها غير متصلة في 0

2- مبرهنة القيم الوسيطة



f متصلة على $[a; b]$
 k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$
 ومنه $k \in f([a; b])$
 يوجد على الأقل عدد c محصور بين a و b
 حيث $f(c) = k$.

مبرهنة القيم الوسيطة

إذا كانت f متصلة على I و a و b عنصرين من I فان لكل k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد c محصور بين a و b حيث $f(c) = k$.

نتيجة

إذا كانت f متصلة على $[a; b]$ وكان $f(a) \cdot f(b) < 0$ فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في $]a; b[$.

تمرين بين أن المعادلة $2 \sin x = x$ تقبل حلا في $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

3- حالة دالة متصلة ورتبة قطعا

الدالة f متصلة و تناقصية قطعا	
المجال I	المجال $f(I)$
$[a; b]$	$[f(b); f(a)]$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$
$]a; b]$	$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a; b[$	$\left[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a; +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right]$
$]a; +\infty[$	$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$] -\infty; a]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$] -\infty; a[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$

الدالة f متصلة و تزايدية قطعا	
المجال I	المجال $f(I)$
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$
$]a; b[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$
$]a; b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$
$]a; b[$	$\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$
$]a; +\infty[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$
$]a; +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$
$] -\infty; a]$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a) \right]$
$] -\infty; a[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right[$

تمرين

f دالة عددية متصلة على $]-\infty; 5]$ جدول تغيراتها كما يلي

x	$-\infty$	0	1	5
f	-1	4	-5	3

1/ حدد $f([1;5])$ و $f([0;5])$ و $f([-2;1])$ و $f(]-\infty;0])$

2/ حدد القيمة القصوى ثم القيمة الدنيا لدالة f على المجال $]-\infty; 5]$ ثم استنتج $f(]-\infty; 5])$

تمرين

لتكن f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = \frac{2x+1}{4x-1}$

1/ حدد D_f /2 حدد صورة المجال $]-\infty; \frac{1}{4}[$ بالدالة f

نتيجة

إذا كانت f متصلة ورتبية قطعاً على $[a;b]$ فإن لكل k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على عدد وحيد c محصور بين a و b حيث $f(c) = k$.

نتيجة

إذا كانت f متصلة ورتبية قطعاً على $[a;b]$ وكان $f(a) \cdot f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $]a;b[$.

تمرين

بين أن المعادلة $x^3 + 1 = -x$ تقبل حلاً وحيداً α في $]-1; -\frac{1}{2}[$

حدد تأطيراً للعدد α سعته $\frac{1}{8}$ (طريقة التفرع الثنائي)

IV- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال خاصية 1-

إذا كانت دالة f متصلة ورتبية قطعاً على مجال I فإن لكل y من $f(I)$ المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلاً وحيداً في I (نعبر عن هذا بقولنا f تقابل من I نحو المجال $f(I)$)

تعريف

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I و J مجال حيث $f(I) = J$. الدالة التي تربط كل عنصر y من J بالعنصر الوحيد x من I بحيث $f(x) = y$ تسمى الدالة العكسية للدالة f نرمز لها بالرمز f^{-1}

نتائج

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية

$$\forall x \in f(I) \quad \forall x \in I \quad f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$\forall x \in f(I) \quad f \circ f^{-1}(x) = x \quad ; \quad \forall x \in I \quad f^{-1} \circ f(x) = x$$

2- خصائص الدالة العكسية

خاصية

إذا كانت دالة f متصلة ورتبية قطعاً على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية فإن:

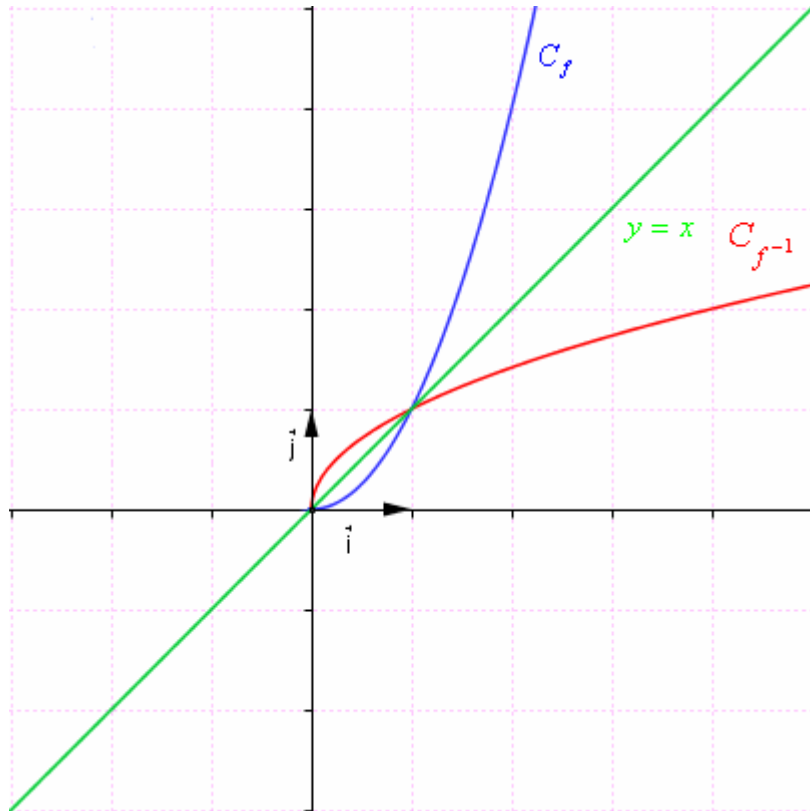
*- f^{-1} متصلة على $f(I)$

*- f^{-1} رتبية قطعاً على $f(I)$ ولها نفس رتبة f على مجال I

*- $C_{f^{-1}}$ منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = x$ في

معلم متعامد و ممنظم.

المستقيم الذي معادلته $y = x$ يسمى المنصف الاول للمعلم

**تمرين**

لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

بين أن القصور g للدالة f على $[-1; 1]$ تقبل

دالة عكسية g^{-1} على مجال J يجب تحديده
ثم حدد g^{-1}

تمرين:

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty; \frac{1}{2}]$

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x}$$

1/ بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} على

مجال J يجب تحديده

2/ حدد f^{-1}

3/ في معلم متعامد ممنظم أنشئ $C_{f^{-1}}$ ثم

انشئ C_f في نفس المعلم

3- دالة الجذر من الرتبة n

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

بين أن الدالة $x \rightarrow x^n$ تقبل دالة عكسية من \mathbb{R}^+ إلى \mathbb{R}^+

أ- تعريف

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

الدالة العكسية للدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي $x \rightarrow x^n$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n

يرمز له بـ $\sqrt[n]{x}$. نرسم

نرمز لصورة العدد x بالرمز $\sqrt[n]{x}$ و يقرأ الجذر من الرتبة n للعدد x .

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

ملاحظة و اصطلاح

ليكن $x \in \mathbb{R}^+$

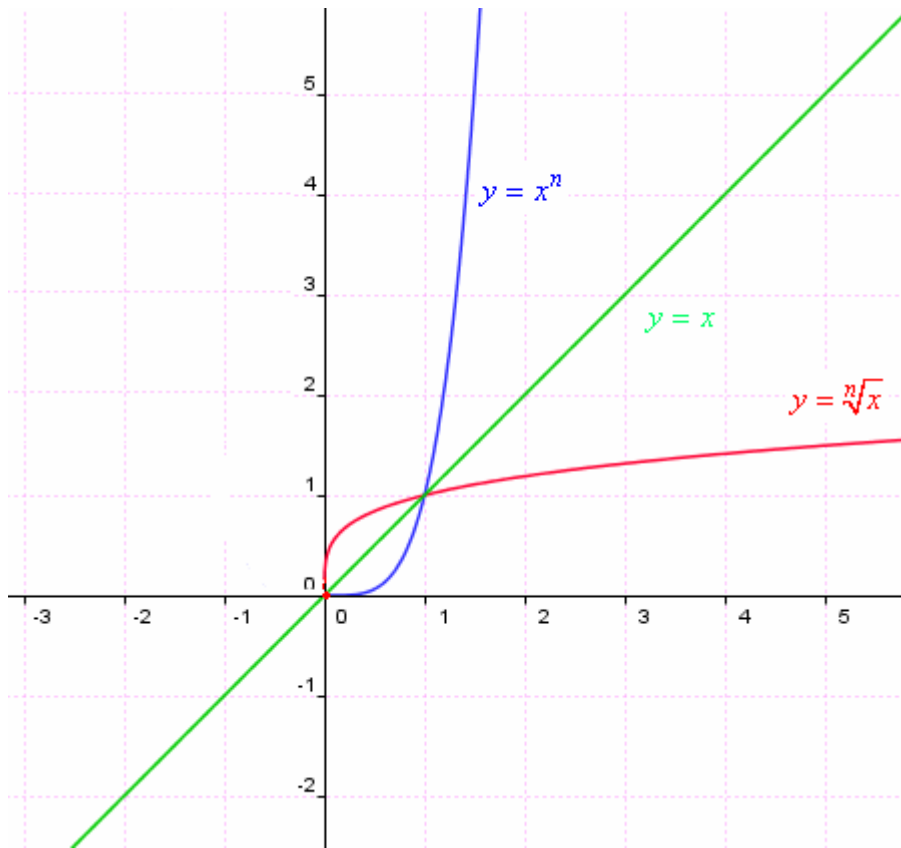
$$- \sqrt{x} = \sqrt{x} \quad ; \quad - \sqrt[3]{x} \text{ يسمى الجذر المكعب للعدد } x$$

خاصية

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

*- الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ متصلة على $[0; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

*- في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ مماثل لمنحنى الدالة $x \rightarrow x^n$ بالنسبة للمنصف الأول للمعلم



حالة: $n = 4$

نتائج

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad (\sqrt[n]{x})^n = x$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$$

ب- حل المعادلة $x^n = a$ $x \in \mathbb{R}$

تمرين حل في \mathbb{R} المعادلات $x^4 = 5$; $x^7 = -8$; $x^5 = 243$

تمرين ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{R}$ حل وناقش في \mathbb{R} المعادلة $x^n = a$

ج- العمليات على الجذور

ليكن $(n; p) \in \mathbb{N}^{*2}$; $(a; b) \in \mathbb{R}^{+2}$

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p} \quad ; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \quad ; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} \quad ; \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[mp]{a^p} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{a})^{pn} = (\sqrt[mp]{a^p})^{pn} \Leftrightarrow \left((\sqrt[n]{a})^n \right)^p = a^p \Leftrightarrow a^p = a^p \quad \text{البرهان}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (n; m) \in \mathbb{N}^{*2} \quad \sqrt[n]{a} \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}} \quad \text{1- برهن أن}$$

تمرين

3- قارن $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{3}$ -2 بسط $\frac{\sqrt[3]{1024}\sqrt[5]{32}}{\sqrt[4]{64}\sqrt[3]{\sqrt{256}}\sqrt{18}}$

د- اتصال ونهاية مركبة دالة و دالة الجذر النوني خاصيات

لتكن f دالة موجبة على مجال I و x_0 عنصرا من I

❖ إذا كانت f متصلة على I فان $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

❖ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ فان $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

❖ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ فان $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

ملاحظة

الخاصيتان تظلان صالحتين عندما يؤول x الى x_0 على اليمين أو الى x_0 على اليسار أو الى $+\infty$ أو الى $-\infty$

تمرين

1- لتكن (E) المعادلة $\sqrt[3]{2x-1} = \sqrt{x}$ $x \in \mathbb{R}$

أ/ تأكد أن 1 حل للمعادلة (E) ب/ حل المعادلة (E)

2- بين أن الدالة $x \rightarrow \sqrt[5]{x^2 - 2x - 3}$ متصلة في كل نقطة من حيز تعريفها .

3- حدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[8]{x^3 - x + 3}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 8}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{x^3 + x + 1}}{\sqrt{x+1}}$

4- القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب (امتداد للقوة الصحيحة النسبية)

تعريف

ليكن $r \in \mathbb{Q}^*$; $a \in \mathbb{R}^+$

العدد a^r هو العدد $\sqrt[q]{a^p}$ حيث $r = \frac{p}{q}$; $(p; q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ و يسمى القوة الجذرية للعدد a ذات

الأس r . $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$

ملاحظة $a \in \mathbb{R}^{+*}$ $a^0 = 1$

حالة خاصة $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ لكل x من $[0; +\infty[$

خاصيات

ليكن $(a; b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$; $(r; r') \in \mathbb{Q}^2$

$a^r a^{r'} = a^{r+r'}$; $a^r b^r = (ab)^r$; $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$

$\frac{1}{a^r} = a^{-r}$; $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$; $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

البرهان نضع $r = \frac{p}{q}$; $r' = \frac{n}{m}$ ومنه $a^r a^{r'} = \sqrt[q]{a^p} \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[qm]{a^{pm} a^{nq}} = \sqrt[qm]{a^{pm+nq}} = a^{\frac{pm+nq}{qm}} = a^{r+r'}$

تمرين

احسب : $A = \frac{2^{\frac{5}{3}} 3^{\frac{5}{2}} \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2^2}}\right)^3}{\left(\frac{2}{2^3}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\sqrt[5]{3^{-3}}\right)^4}$

طريقة التفرع النهائي DICHOTOMIE

نتيجة لمبرهنة القيم الوسيطة

إذا كانت f متصلة ورتبية قطعاً على $[a; b]$ وكان $f(a) \cdot f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $]a; b[$.

تحديد تأطيراً للعدد α سعته l

