I. تقديم ومصطلحات :

1. التجربة العشوائية : Expérience aléatoire :

تعريف :

> نسمي كل تجربة لا يمكن التنبؤ بنتائجها **تجربة عشوائية** .

✓ **مثال 1 :** نرمي قطعة نقدية غير مغشوشة في الهواء .

لدينا نتيجتان ممكنتان : الوجه $(face : \ F)$ و الظهر $(pile : \ P)$.

نقول إن P إمكانية . لدينا F إمكانية . $(éventualité)$

المجموعة $\Omega = \{F, P\}$ تسمى كون الإمكانيات. $(Univers \ \ des \ \ éventualités)$

كل جزء من Ω مكون من عنصر واحد يسمى حدثا ابتدائيا $(évènement \ \ élémentaire)$

$A = \{P\}$ حدث ابتدائي .

$\varnothing$ هو الحدث المستحيل . $(évènement \ \ impossible)$

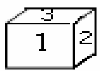
Ω هو الحدث الأكيد . $(évènement \ \ certain)$

✓ **مثال 2 :** نرمي قطعتين غير مغشوشتين في الهواء .

كون الإمكانيات هو : $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. لدينا : $Card\,(\Omega) = 4$.

الأحداث الابتدائية هي : $\{PP\}$ و $\{PF\}$ و $\{FP\}$ و $\{FF\}$.

✓ **مثال 3 :** نرمي نردا مكعبا غير مغشوش في الهواء وجوهه مرقمة من 1 إلى 6



كون الامكانيات هو : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

الأحداث الابتدائية هي : $\{1\}$ و $\{2\}$ و $\{3\}$ و $\{4\}$ و $\{5\}$ و $\{6\}$. ولدينا : $Card\,(\Omega) = 6$.

✓ **مثال 4 :** نرمي نردين مكعبين غير مغشوشين في الهواء وجوه كل واحد منهما مرقمة من 1 إلى 6 . نرد مكعب $= \ Dés \ \ Cubique$

نضع : $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$. إذن كون الامكانيات هو :

$\Omega = \Omega_1^2 = \{(x, y) \ \ / \ \ x \in \Omega_1 \ \ و \ \ y \in \Omega_1\}$. ولدينا : $Card\,(\Omega) = 36$.

Ω_1 \ Ω_1	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

حدد الحدث التالي : A « مجموع الرقمين المحصل عليهما هو 7 »

لدينا : $A = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}$.ولدينا: $Card\,(A) = 6$.و $Card\,(\Omega) = 36 = 6^2$

الحدث المتمم للحدث A هو : « مجموع الرقمين المحصل عليهما يخالف 7 » ؛ ونرمز له بالرمز $\overline{A}$ أو C_Ω^A أو $\Omega - A$. لدينا : $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \ \ / \ \ \omega \notin A\}$.($évènement \ complémentaire$)

2. تعريف :

أ.

> نقول إن A و B **حدثان مضادان** إذا كلن الواحد منهما متمم للآخر ؛ $(B = \overline{A})$
>
> $(évènements \ \ contraires)$

مثال : لكل حدث A ؛ لدينا : A و $\overline{A}$ حدثان مضادان .

ب.

نقول إن حدثين A و B **غير منسجمان** إذا كان لدينا : $A \cap B = \varnothing$.
نقول أيضا : A و B حدثان **منفصلان**. (A et B sont incompatibles)

مثال : لكل حدث A ؛ لدينا : A و $\overline{A}$ حدثان غير منسجمان . $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

ت.

كل مجموعة مكونة من نتيجة أو أكثر من بين النتائج الممكنة لتجربة عشوائية تسمى **حدثا** في هذه التجربة .

II. الفضاءات الاحتمالية المنتهية : Espaces Probabilisés Finis :

1. تعريف :

لتكن Ω مجموعة منتهية غير فارغة . نسمي **احتمالا** على Ω كل تطبيق p من $\mathcal{P}(\Omega)$ نحو المجال $[0,1]$ ؛ بحيث :

i. $\boxed{p(\Omega)=1}$.

ii. $\boxed{p(A \cup B)=p(A)+p(B)}$

لكل حدثين غير منسجمين A و B من $\mathcal{P}(\Omega)$.

المثلوث $(\Omega, p(\Omega), p)$ يسمى **فضاء احتماليا منتهيا** .

ملاحظة : i. احتمال الحدث الأكيد هو 1 .
ii. احتمال اتحاد حدثين غير منسجمين هو مجموع احتماليهما .

2. خاصيات :

ليكن $(\Omega, p(\Omega), p)$ فضاء احتماليا منتهيا .

$$\begin{array}{cccc} p & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & & A & \mapsto & p(A) \end{array}$$

. لكل A و B من $p(\Omega)$ ؛ لدينا:

i. $\boxed{p(\varnothing)=0}$.

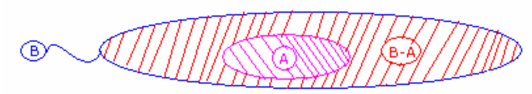
ii. $\boxed{A \subset B \quad \Rightarrow \quad p(A) \le p(B)}$

iii. $\boxed{p(\overline{A})=1-p(A)}$.

iv. $\boxed{p(A \cup B)=p(A)+p(B)-p(A \cap B)}$

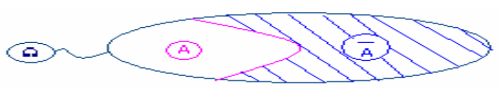
برهان : i. لدينا $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$ ؛ إذن : $p(\varnothing)=p(\varnothing \cup \varnothing)=p(\varnothing)+p(\varnothing)$. إذن : $p(\varnothing)=0$.

ii. بما أن $A \subset B$ ؛ فإن : $B = A \cup (B-A)$ و $A \cap (B-A)=\varnothing$

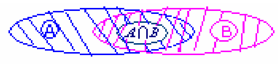


إذن : $p(B)=p(A)+p(B-A)$ ومنه فإن : $p(B)-p(A)=p(B-A) \ge 0$ ؛
وبالتالي فإن : $p(A) \le p(B)$.

iii. لدينا : $A \cap \overline{A} = \varnothing$ و $A \cup \overline{A} = \Omega$. إذن : $1=p(\Omega)=p(A \cup \overline{A})=p(A)+p(\overline{A})$ ؛



ومنه فإن : $p(\overline{A})=1-p(A)$.



$iv.$ لدينا : $A\cup B=A\cup(B-A)$ و $A\cap(B-A)=\varnothing$.

إذن : $p(A\cup B)=p(A)+p(B-A)$.

ولدينا : $B=(A\cap B)\cup(B-A)$ و $(A\cap B)\cap(B-A)=\varnothing$

إذن : $p(B)=p(A\cap B)+p(B-A)\Rightarrow p(B-A)=p(B)-p(A\cap B)$

وعليه فإن : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.

III. فرضية تساوي الاحتمال : Hypothèse d'Equiprobabilités :

ليكن $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),p)$ فضاء احتماليا منتهيا . نضع : $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ حيث : $Card(\Omega)=n$ ؛ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

1. تعريف :

نقول إن كون الإمكانيات Ω مزود باحتمال **منتظم** ؛ إذا كانت كل الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال.

2. ملاحظة :

نضع : $k=p(\{\omega_1\})$. حسب فرضية تساوي الاحتمال ؛ لدينا :

$$p(\{\omega_1\})=p(\{\omega_2\})=p(\{\omega_3\})=p(\{\omega_4\})=p(\{\omega_5\})=p(\{\omega_6\})=k$$

ولدينا : $\Omega=\{\omega_1\}+\{\omega_2\}+\{\omega_3\}+\{\omega_4\}+\{\omega_5\}+\{\omega_6\}$.

إذن : $1=p(\Omega)=p(\{\omega_1\})+p(\{\omega_2\})+p(\{\omega_3\})+p(\{\omega_4\})+p(\{\omega_5\})+p(\{\omega_6\})$

ومنه فإن : $1=n\times p(\{\omega_1\})\Rightarrow \boxed{p(\{\omega_1\})=\frac{1}{n}=\frac{1}{Card(\Omega)}}$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall k\in\{1,2,...,n\}\quad:\quad p(\{\omega_k\})=\frac{1}{n}=\frac{1}{Card(\Omega)}}$

ملاحظة :

- ✓ مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية هو 1 .
- ✓ احتمال حدث هو عدد محصور بين 0 و 1 .
- ✓ إذا كان تطبيق $p:\mathcal{P}(\Omega)\to[0,1]$ يحقق الشرطين التاليين :
  - احتمال الحدث المستحيل هو 0 . $p(\varnothing)=0$.
  - مجموع صور الأحداث الابتدائية بالتطبيق p هو 1 .

  فإن p احتمال على Ω .
- ✓ احتمال حدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي توجد ضمن A .

3. مبرهنة هامة:

في حالة تساوي الاحتمال في فضاء احتمالي منته $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),p)$؛ احتمال حدث A هو :

$$\boxed{P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$$

$$p(A)=\frac{\text{عدد الإمكانيات الممكنة المرجحة لتحقيق الحدث } A}{\text{عدد الإمكانيات الممكنة}}$$

برهان : ليكن A حدثا $A\subset\Omega$. نضع : $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ ؛ لدينا :

$$p(A)=p(\{a_1\})+p(\{a_2\})+...+p(\{a_k\})=k\times\frac{1}{Card(\Omega)}=\frac{k}{Card(\Omega)}=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

4. تمرين تطبيقي : في صندوق ؛ توجد كرتان لونهما أحمر ؛ وثلاث كرات لونها أخضر ؛ وأربع كرات لونها أبيض ؛ وكرتان لونهما أصفر .
نقوم بسحب كرتين في آن واحد وبطريقة عشوائية من هذا الصندوق.
1. أ- ما هو احتمال سحب كرتين لونهما أحمر.
ب- ما هو احتمال سحب كرتين لونهما أبيض.
جـ- ما هو احتمال سحب كرتين لونهما أصفر.
د- ما هو احتمال سحب كرتين لونهما أخضر.
2. ما هو احتمال سحب كرتين من نفس اللون .
3. ما هو احتمال سحب كرتين مختلفتي اللون .
4. ما هو احتمال سحب كرتين لونهما ليس أبيض ولا أصفر .
5. ما هو احتمال أن تكون إحداهما على الأقل خضراء .

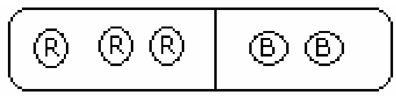
الجواب : **تثبيت الصنف :** السحب الآني لكرتين يدل على التأليفات لكرتين من بين 11 .

1. أ- نعتبر الحدث A: « سحب كرتين لونهما أحمر ». احتمال الحدث A هو :
$$p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{C_2^2}{C_{11}^2}=\boxed{\frac{1}{55}}$$
ب- نعتبر الحدث B: « سحب كرتين لونهما أبيض ». احتمال الحدث B هو :
$$p(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{C_4^2}{C_{11}^2}=\boxed{\frac{6}{55}}$$
جـ- نعتبر الحدث C: « سحب كرتين لونهما أصفر ». احتمال الحدث C هو :
$$p(C)=\frac{Card(C)}{Card(\Omega)}=\frac{C_2^2}{C_{11}^2}=\boxed{\frac{1}{55}}$$
د - نعتبر الحدث D: « سحب كرتين لونهما أخضر ». احتمال الحدث D هو :
$$p(D)=\frac{Card(D)}{Card(\Omega)}=\frac{C_3^2}{C_{11}^2}=\boxed{\frac{3}{55}}$$
2. نعتبر الحدث M: « سحب كرتين من نفس اللون » . احتمال الحدث M هو :
$$p(M)=\frac{C_2^2+C_4^2+C_2^2+C_3^2}{C_{11}^2}=\frac{1+6+1+3}{55}=\boxed{\frac{1}{5}}\ .$$
لا حظ أن : $M=A\cup B\cup C\cup D$ و A و B و C و D غير منسجمة مثنى مثنى . إذن :
$$p(M)=p(A)+p(B)+p(C)+p(D)=\frac{1}{55}+\frac{6}{55}+\frac{1}{55}+\frac{3}{55}=\frac{1}{5}$$
3. نعتبر الحدث N: « سحب كرتين مختلفتي اللون » . بملاحظة أن الحدث N هو الحدث المضاد للحدث M فإن احتمال الحدث N هو : $p(N)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{1}{5}=\boxed{\frac{4}{5}}$
4. نعتبر الحدث F: « سحب كرتين لونهما ليس أبيض ولا أصفر ». احتمال الحدث F هو :
$$p(F)=\frac{C_5^2}{C_{11}^2}=\frac{10}{55}=\boxed{\frac{2}{5}}\ .$$
5. نعتبر الحدث G: « سحب كرتين إحداهما على الأقل خضراء ». احتمال الحدث G هو :
$$p(G)=\frac{C_3^1\times C_8^1+C_3^2}{C_{11}^2}=\frac{3\times 8+3}{55}=\boxed{\frac{27}{55}}\ .\quad \left(V\overline{V}\ \text{أو}\ VV\right)$$

IV. الاحتمال الشرطي : La Probabilté Conditionnelle :

1. مثال 1 : يحتوي صندوق على ثلاث كرات حمراء وكرتين بيضاوين . نسحب كرتين الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع الكرة المسحوبة إلى الصندوق .
نعتبر الحدثين : A: « الكرة المسحوبة الأولى حمراء »
B: « الكرة المسحوبة الثانية بيضاء »
1. أحسب ما يلي : $\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

2. ما هو احتمال الحدث B ؛ علما أن الحدث A محقق . (نرمز له بالرمز $p_A(B)$)
3. ماذا تستنتج ؟



الحل :

1. السحب المتتابع بدون إحلال يدل على الترتيبات . إذن : $p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\dfrac{A_3^1\times A_4^1}{A_5^2}=\dfrac{3\times4}{5\times4}=\boxed{\dfrac{3}{5}}$.

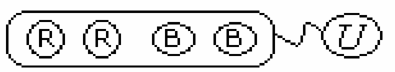
أي : الكرة المسحوبة الأولى حمراء ؛ والكرة المسحوبة الثانية من الكرات المتبقية.
ولدينا : $A\cap B$:≪ الكرة المسحوبة الأولى حمراء والكرة المسحوبة الثانية بيضاء≫

إذن : $p(A\cap B)=\dfrac{Card(A\cap B)}{Card(\Omega)}=\dfrac{A_3^1\times A_2^1}{A_5^2}=\dfrac{3\times2}{5\times4}=\boxed{\dfrac{3}{10}}$.

ومنه فإن : $\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$.

2. احتمال الحدث B ؛ علما أن الحدث A محقق ؛ هو : $p_A(B)=\dfrac{A_2^1}{A_4^1}=\dfrac{2}{4}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$.

الحدث A محقق يعني أن الصندوق يحتوي على كرتين حمراوين وعلى كرتين بيضاوين . الاحتمال المطلوب هو احتمال الحصول على كرة بيضاء من الصندوق U .



3. نستنتج مما سبق ؛ أن : $\boxed{p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}}$.

2. تعريف :

ليكن (Ω,p) فضاء احتماليا منتهيا ؛ وليكن A حدثا من $\mathcal{P}(\Omega)$ حيث $\boxed{p(A)\neq0}$.

احتمال حدث B ؛ علما أن الحدث A محقق هو : $\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$ ونرمز له بالرمز $p_A(B)$ أو $p(B/A)$ ؛ ونكتب : $\boxed{p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}}$

3. ملاحظات :

- ✓ في حالة فرضية تساوي الاحتمال ؛ يكون لدينا :
  احتمال حدث B؛علما أن الحدث A محقق هو: $\boxed{p_A(B)=\dfrac{Card(A\cap B)}{Card(A)}}$
- ✓ **الاحتمال الشرطي** بالنسبة لحدث A ؛ هو التطبيق :

$$\begin{array}{llll} p_A & : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & B & \mapsto & p_A(B) \end{array}$$

4. مثال 2 :

تضم إحدى الثانويات 250 تلميذا ؛ موزعين إلى داخليين و خارجيين كما يلي :

الجنس \ داخلي/خارجي	داخلي	خارجي	المجموع
الذكور	120	80	200
الإناث	20	30	50
المجموع	140	110	250

اخترنا عشوائيا تلميذا من بين 250 تلميذ . لجميع التلاميذ نفس الاحتمال لكي يتم اختيارهم .

1. أحسب احتمالات الأحداث التالية :

G: « اختيار تلميذ ذكر » .

F: « اختيار تلميذة أنثى » .

E: « اختيار تلميذ خارجي » .

I: « اختيار تلميذ داخلي » .

2. إذا كان التلميذ المختار ذكرا ؛ فما هو الاحتمال لكي يكون خارجيا ؟

الجواب :

1. لدينا :

$p(G)=\frac{Card(G)}{Card(\Omega)}=\frac{200}{250}=\boxed{\frac{4}{5}}$.

$p(F)=\frac{Card(F)}{Card(\Omega)}=\frac{50}{250}=\boxed{\frac{1}{5}}$.

$p(E)=\frac{Card(E)}{Card(\Omega)}=\frac{110}{250}=\boxed{\frac{11}{25}}$.

$p(I)=\frac{Card(I)}{Card(\Omega)}=\frac{140}{250}=\boxed{\frac{14}{25}}$.

2. إذا كان التلميذ المختار ذكرا ؛ فإن الاحتمال لكي يكون خارجيا هو: $p_G(E)=\frac{80}{200}=\boxed{\frac{2}{5}}$.

5. صيغة الاحتمالات المركبة : Formule des Probabilités Composées :

خاصية :

إذا كان A و B حدثان احتمالاهما غير منعدمين ؛ فإن :

$$\boxed{p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)=p(B)\times p_B(A)}$$

برهان : لدينا : $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}\Rightarrow p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$.

ولدينا : $p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}\Rightarrow p(A\cap B)=p(B)\times p_B(A)$.

استنتاج :

إذا كان A و B حدثان احتمالاهما غير منعدمين ؛ فإن :

$$\boxed{\frac{p(A)}{p(B)}=\frac{p_B(A)}{p_A(B)}}$$

V. الاحتمالات الكلية : Les Probabilités Totales :

1. تجزيئ مجموعة : Partition d'un ensemble :

مثال : نعتبر الفضاء $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. ونعتبر الأحداث التالية: $A_1=\{2,4,6\}$ و $A_2=\{1\}$ و $A_3=\{5,6\}$.

لدينا : $A_1\cap A_2=\varnothing$ و $A_1\cap A_3=\varnothing$ و $A_2\cap A_3=\varnothing$ و $\Omega=A_1\cup A_2\cup A_3$.

الأحداث A_1 و A_2 و A_3 غير منسجمة مثنى مثنى واتحادها Ω .

نقول إن الأحداث A_1 و A_2 و A_3 تكون تجزيئا للفضاء Ω .

2. تعريف :

ليكن (Ω,p) فضاء احتماليا منتهيا وليكن $n\in\mathbb{N}^*$.

نقول إن الأحداث A_1 و A_2 و . . . و A_n تكون **تجزيئا** للفضاء Ω ؛ إذا كانت غير منسجمة مثنى مثنى واتحادها Ω . أي :

أ- $A_i\cap A_j=\varnothing$ لكل $1\le i\le n$ و $1\le j\le n$ حيث $i\ne j$.

ب- $\Omega=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$

3. مبرهنة الاحتمالات الكلية :

ليكن (Ω,p) فضاء احتماليا منتهيا وليكن $n\in\mathbb{N}^*$.
نعتبر A_1 و A_2 و ... و A_n تجزيئا للفضاء Ω ؛ و B حدثا من Ω. احتمال الحدث B هو :
$$\boxed{p(B)=p(A_1)\times p_{A_1}(B)+p(A_2)\times p_{A_2}(B)+...+p(A_n)\times p_{A_n}(B)}$$

برهان : لدينا : A_1 و A_2 و ... و A_n تجزيئا للفضاء Ω . بما أن $B\subset\Omega$ ؛ فإن :

$B=B\cap\Omega$

$B=B\cap(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n)$

$B=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup...\cup(B\cap A_n)$

بما أن الأحداث A_1 و A_2 و ... و A_n غير منسجمة مثنى مثنى فإن الأحداث $B\cap A_1$ و $B\cap A_2$ و ... و $B\cap A_n$ غير منسجمة مثنى مثنى. إذن :
$$p(B)=p(B\cap A_1)+p(B\cap A_2)+...+p(B\cap A_n)$$
$$p(B)=p(A_1)\times p_{A_1}(B)+p(A_2)\times p_{A_2}(B)+...+p(A_n)\times p_{A_n}(B)$$

4. تمرين تطبيقي : نعتبر نردا مكعبا غير مغشوش في الهواء تحمل وجوهه الستة الأرقام التالية :

2 - 2 - 1 - 1 - 1 - 1

ونعتبر صندوقين :
$\mathcal{U}_1$: يحتوي على ثلاث كرات حمراء وكرتين بيضاوين .
$\mathcal{U}_2$: يحتوي على أربع كرات حمراء وثلاث كرات بيضاء .
نرمي النرد مرة واحدة في الهواء :

- ✓ إذا ظهر الرقم 1 ؛ نسحب كرة من $\mathcal{U}_1$.
- ✓ إذا ظهر الرقم 2 ؛ نسحب كرة من $\mathcal{U}_2$.

1. ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء.
2. ما هو احتمال الحصول على كرة حمراء .
3. علما أن الكرة المسحوبة بيضاء ؛ ما هو احتمال أن تكون من الصندوق $\mathcal{U}_1$.

الجواب :

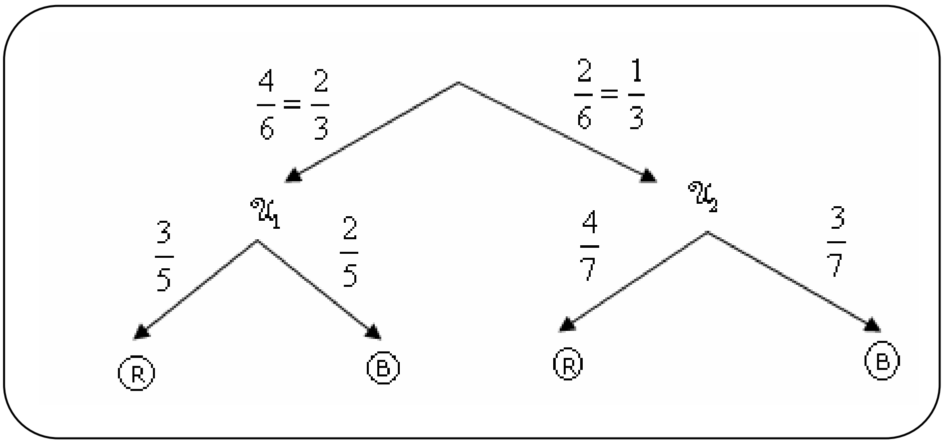
نعتبر الحدثين التاليين : A_1: « ظهور الرقم 1 عند رمي النرد ». أي: اختيار الصندوق $\mathcal{U}_1$.
A_2: « ظهور الرقم 2 عند رمي النرد ». أي: اختيار الصندوق $\mathcal{U}_2$.
لدينا A_1 و A_2 حدثان غير منسجمان واتحادهما Ω ؛ إذن فهي تكون تجزيئا للفضاء Ω .

1. نعتبر الحدث : B: « سحب كرة بيضاء » . حسب صيغة الاحتمالات الكلية ؛ احتمال الحدث B هو :
$$p(B)=p(A_1)\times p_{A_1}(B)+p(A_2)\times p_{A_2}(B)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{7}=\boxed{\frac{43}{105}\approx 0,41}.$$

2. نعتبر الحدث : R: « سحب كرة حمراء » . حسب صيغة الاحتمالات الكلية ؛ احتمال الحدث R هو :
$$p(R)=p(A_1)\times p_{A_1}(R)+p(A_2)\times p_{A_2}(R)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{6}\times\frac{4}{7}=\boxed{\frac{62}{105}\approx 0,59}.$$

3. علما أن الكرة المسحوبة بيضاء ؛ احتمال أن تكون من الصندوق $\mathcal{U}_1$ هو $p_B(A_1)$.
حسب صيغة الاحتمالات المركبة ؛ لدينا : $p(B)\times p_B(A_1)=p(A_1)\times p_{A_1}(B)$ ؛ إذن :
$$p_B(A_1)=\frac{p(A_1)\times p_{A_1}(B)}{p(B)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}}{\frac{43}{105}}=\frac{4}{15}\times\frac{105}{43}=\boxed{\frac{28}{43}\approx 0,65}$$

نلخص النتائج السابقة في شجرة الإمكانيات التالية :



VI. الاستقلالية : L’indépendance :

1. تعريف :

ليكن (Ω, p) فضاء احتماليا . نقول إن حدثان A و B مستقلان ؛ إذا كان :

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$$

ملاحظة : إذا كان $p(A) \neq 0$ ؛ فإن : A و B مستقلان $\Leftrightarrow$ $p_A(B) = p(B)$.

2. تمرين تطبيقي :

نرمي نردا مكعبا غير مغشوش في الهواء تحمل وجوهه الستة الأرقام من 1 إلى 6 مرتين متتاليتين . نعتبر الأحداث التالية :

A: « الحصول على العدد 2 في الرمية الأولى ».

B: « الحصول على عددين مجموعهما 7 » .

C: « الحصول على عددين زوجيين ».

1. أحسب الاحتمالات التالية: $p(A)$ و (B) و $p(A \cap B)$ ؛ ثم استنتج أن : A و B حدثان مستقلان .
2. هل الحدثان A و C مستقلان ؟

الجواب :

1. احتمال الحدث C هو : $p(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{1^1 \times 6^1}{6^2} = \dfrac{6}{36} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

لدينا : $B = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}$؛ إذن احتمال الحدث C هو :

$p(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{6}{6^2} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

لدينا : $A \cap B = \{(2,5)\}$ ؛ إذن : $p(A \cap B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{1^1 \times 1^1}{6^2} = \boxed{\dfrac{1}{36}}$.

2. بما أن: $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ ؛ فإن A و B حدثان مستقلان.

ف	ز

3. احتمال الحدث C هو : $p(C) = \dfrac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \dfrac{3^2}{6^2} = \dfrac{9}{36} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$.

لدينا : $A \cap C = \{(2,2)\}$ ؛ إذن احتمال الحدث $A \cap C$ هو :

$p(A \cap C) = \dfrac{Card(A \cap C)}{Card(\Omega)} = \dfrac{1^1 \times 1^1}{6^2} = \boxed{\dfrac{1}{36}}$.

بما أن : $p(A \cap C) = \dfrac{1}{36}$ و $p(A) \times p(C) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{4} = \boxed{\dfrac{1}{24}}$ ؛

فإن : $p(A \cap C) \neq p(A) \times p(C)$. إذن A و C حدثان غير مستقلان .

3. استقلالية الاختبارات العشوائية: L’indépendance des épreuves aléatoires :

أ. تمهيد :

✓ $i)$ رمي قطعة نقود n مرة متتالية . (يمكن اعتبار كل رمية اختبارا عشوائيا)

✓ $ii)$ سحب n كرة من بين m كرة بالتتابع وبدون إحلال $(n \leq m)$.

(كل سحبة يمكن اعتبارها اختبارا عشوائيا)

✓ $iii)$ سحب n كرة من بين m كرة بالتتابع وبإحلال .

✓ $iv)$ رمي نرد مكعب n مرة متتالية .

- بعض التجارب العشوائية تتكون من اختبار واحد أو عدة اختبارات عشوائية .
ونلاحظ أن في بعض التجارب ؛ لا تؤثر نتائج اختبار على الاختبار الموالي له .
مثال : تجارب (i) و (iii) و (iv) .
- في حين ؛ تؤثر نتائج اختبار على الاختبار الموالي في التجربة (ii) .
(لا نعيد الكرة المسحوبة ؛ فيتغير عدد الإمكانيات ...)
- إذا كانت نتائج اختبار ما ؛ لا تؤثر على نتائج الاختبار الموالي ؛ نقول إن التجربة تتكون من **اختبارات عشوائية مستقلة** .

ب. الاختبارات المتكررة : Les épreuves répétées :

✓ **أمثلة :**

- نرمي نردا مكعبا غير مغشوش في الهواء **خمس** مرات متتالية.
- نرمي قطعة نقدية غير مغشوشة في الهواء **ثلاث** مرات متتالية.
- نسحب **أربع** كرات من كيس يحتوي على n كرة بالتتابع وبإحلال .

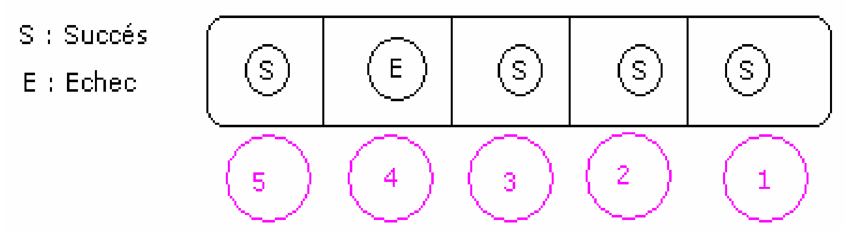
✓ **مثال :** نرمي نردا مكعبا غير مغشوش في الهواء **خمس** مرات متتالية . أحسب احتمال الحصول على عدد قابل للقسمة على 3 **أربع مرات بالضبط** .

الجواب : تتكون هذه التجربة من تكرار الاختبار : « رمي نرد في الهواء » خمس مرات.

طريقة 1: نعتبر الحدث: S : « الحصول على عدد قابل للقسمة على 3 » .

لدينا : $S = \{3,6\}$ ؛ و $p(S) = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

في كل رمية ؛ إما أن يتحقق الحدث S وإما أن لا يتحقق.



لدينا : C_5^4 إمكانية لاختيار الأمكنة التي سيتحقق فيها الحدث S .

لدينا : احتمال الحدث S هو $p(S) = \boxed{\frac{1}{3}}$ ؛ واحتمال الحدث $E = \overline{S}$ هو :

$$p(E) = p(\overline{S}) = 1 - p(S) = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}} .$$

احتمال الإمكانية $SESSS$ هو : $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 = (p(S))^4 \times p(\overline{S})$. ومنه فإن :

احتمال الحصول على رقم قابل للقسمة على 3 أربع مرات بالضبط هو :

$$C_5^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \boxed{\frac{10}{243} \approx 0,41}$$

طريقة 2 : هذه التجربة تدل على السحب المتتابع بإحلال لخمسة أرقام من بين الأرقام الستة المكونة للنرد ؛ وهذا يدل على الترتيبات لخمسة عناصر.

نعتبر الحدث A: « الحصول على رقم قابل للقسمة على 3 أربع مرات بالضبط»

احتمال الحدث A هو :

$$p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{C_5^4\times 2^4\times 4^1}{6^6}=C_5^4\times\left(\frac{2}{6}\right)^4\times\left(\frac{4}{6}\right)^1=\boxed{C_5^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^1}$$

خاصية :

ليكن (Ω,p) فضاء احتماليا منتهيا ؛ وليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ؛ وليكن S حدثا احتماله p في اختبار عشوائي .
إذا **أعيد** هذا الاختبار n مرة ؛ فإن احتمال وقوع الحدث S ؛ k مرة بالضبط (حيث : $0\le k\le n$) ؛ هو : $\boxed{C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}}$

جـ. تمرين تطبيقي :

1. الاحتمال لكي يصيب رام الهدف هو $\frac{2}{3}$. قام هذا الرامي بعشر محاولات . ما هو الاحتمال لكي يصيب الهدف ست مرات بالضبط .
2. يحتوي كيس على ست بيدقات تحمل الرقم 0 وعلى أربع بيدقات تحمل الرقم 1 و بيدقة واحدة تحمل الرقم 2 . نسحب بالتتابع وبإحلال ست بيدقات من الكيس . ماهو احتمال الحصول بالضبط على خمس بيدقات تحمل الرقم 1 .

VII. تمارين تطبيقية :

1. تمرين تطبيقي رقم 1 :

يحتوي صندوق B_1 على ثلاث كرات بيضاء وكرتين سوداوين ويحتوي صندوق B_2 على خمس كرات بيضاء وكرة سوداء . نعتبر التجربة التالية : « سحب كرة واحدة من B_1 وكرة من B_2 » .

1. أحسب احتمال كل من الحدثين التاليين :
   E: « الكرتان المسحوبتان بيضاوان »
   F : « الكرتان المسحوبتان سوداوان »
2. ليكن S الحدث : « الكرتان المسحوبتان لهما نفس اللون »
   أ- تحقق أن : $p(S)=\frac{17}{30}$.
   ب- نعيد التجربة السابقة خمس مرات متتالية مع إعادة كل كرة إلى الصندوق الذي سحبت منه قبل القيام بالسحبة الموالية .
   ما هو احتمال الحصول على الحدث S ثلاث مرات بالضبط ؟

2. تمرين تطبيقي رقم 2 :

يحتوي صندوق على أربع كرات حمراء وثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بين جميع الكرات باللمس) . نسحب كرة من الصندوق :
- إذا كانت حمراء ؛ نسحب تآنيا كرتين من بين الكرات المتبقية .
- إذا كانت خضراء ؛ نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرتين من بين الكرات المتبقية .

1. أ- حدد عدد الإمكانيات .
   ب- أحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون .
2. إذا علمت أنه حصلنا على كرتين خضراوين بالضبط؛ أحسب احتمال أن تكون الكرة الأولى المسحوبة خضراء .

3. تمرين تطبيقي رقم 3 :

نعتبر مجتمعا مكونا من 60% من الرجال و 40% من النساء .نعلم أن 20% من الرجال و 10% من النساء يتكلمون اللغة الفرنسية. اخترنا عشوائيا شخصا من هذا المجتمع .

1. ما هو الاحتمال لكي يكون هذا الشخص :
   أ . رجلا ويتكلم الفرنسية ؟
   ب. رجلا ولا يتكلم الفرنسية ؟
   جـ . امرأة وتتكلم الفرنسية ؟
   د . امرأة ولا تتكلم الفرنسية ؟
2. علما أن الشخص المختار يتكلم الفرنسية ؛ ما هو احتمال أن يكون رجلا .
3. علما أن الشخص المختار لا يتكلم الفرنسية؛ ما هو احتمال أن يكون امرأة .