الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

I-الجداء السلمي

1- تعريف

لتكن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين من الفضاء، و A و B و C نقط من الفضاء حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

يوجد على الاقل مستوى (P) ضمن الفضاء يمر من النقط A و B و C.

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{v}$ و $\vec{u}$ في الفضاء هو الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ في المستوى (P) نرمز له بـ $\vec{u}\cdot\vec{v}$

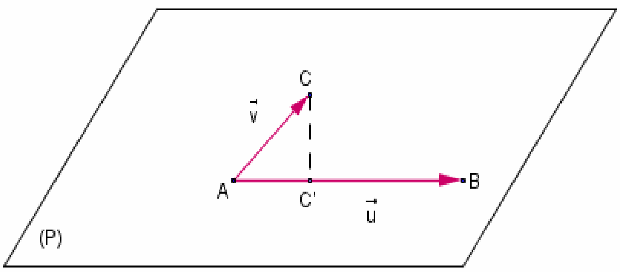
ملحوظة

جميع خاصيات الجداء السلمي في المستوى تمدد إلى الفضاء

2- نتائج

لتكن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين من الفضاء، و A و B و C نقط من الفضاء

حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.



* إذا كان $\vec{v}\neq\vec{0}$ و $\vec{u}\neq\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

* إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

* إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$

حيث C' المسقط العمودي لـ C على (AB)

* $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

3- منظم متجهة

لتكن $\vec{u}$ متجهة وA و B نقطتين من الفضاء حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ يسمى المربع السلمي لـ $\vec{u}$ و يكتب $\vec{u}^2=AB^2$

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{\vec{u}^2}$ يسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ نكتب $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$

ملاحظة و كتابة

* $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}^2$

* إذا كان $\vec{v}\neq\vec{0}$ و $\vec{u}\neq\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$

4- خاصيات

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\quad\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in V_3^3$ * $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ * $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ * $(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{u}$ * $\vec{u}\cdot\alpha\vec{v}=\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}=\alpha\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$	**متطابقات هامة** $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$ $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$ $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

5- تعامد متجهتين :

تعريف

لتكن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين من الفضاء V_3.

تكون $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ نكتب $\vec{u}\perp\vec{v}$

ملاحظة المتجهة $\vec{0}$ عمودية على أية متجهة من الفضاء V_3

تمرين

المكعب ABCDEFGH الذي طول حرفه a

أحسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EB}$

II- صيـــــغ تحليليــــــــة

1- الأساس و المعلم المتعامدان الممنظمان

تعريف

لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير مستوائـــية من الفضاء V_3 و O نقطة من الفضاء.

$(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أسا س للفضاء V_3

يكون الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامد (أو المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامد) إذا وفقط إذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى.

يكون الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامد و ممنظم (أو المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ تعامد وممنظم) إذا وفقط إذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى و $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

2- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

أ- خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم.م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

إذا كانت $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

ملاحظة إذا كانت $\vec{u}(x;y;z)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ فان

$$\vec{u}\cdot\vec{i} = x \quad ; \quad \vec{u}\cdot\vec{j} = y \quad ; \quad \vec{u}\cdot\vec{k} = z$$

ب- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة بن نقطتين

*- إذا كانت $\vec{u}(x;y;z)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ فان $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

*- اذا كانت $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

فان $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

تمرين

نعتبر $A(1;1;\sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$ و $C(-1;-1;-\sqrt{2})$

بين أن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية

3- تحديد تحليلي لمجموعة النقط M من الفضا ء بحيث $\vec{u}.\overrightarrow{MA} = k$

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من الفضاء

نعتبر $M(x;y;z)$

$$\vec{u}.\overrightarrow{MA} = k \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

خاصية

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء

مجموعة النقط M من الفضا ء بحيث $\vec{u}.\overrightarrow{MA} = k$ هي مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ حيث d عدد حقيقي

مثال نعتبر $\vec{u}(2;-1;1)$ متجهة و $A(1;-1;2)$ نقطة من الفضاء

حدد مجموعة النقط M من الفضا ء بحيث $\vec{u}.\overrightarrow{MA} = -1$

III- تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء

1- تعامد المستقيمات و المستويات في الفضاء

أ- تعامد مستقيمين

ليكن (D_1) و (D_2) مستقيمـين من الفضاء موجهين بالمتجهتين $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ على التوالي

$$(D_1) \perp (D_2) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

ب- تعامد مستقيم و مستوى

خاصية

ليكن (P) مستوى موجه بالمتجهتين $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ و (D) مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{u}_3$

$$(D) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_3 \text{ و } \vec{u}_2 \perp \vec{u}_3$$

ج- ملاحظات واصطلاحات

* المتجهة $\vec{u}$ الموجهة لمستقيم (D) العمودي على مستوى (P) تسمى متجهة منظمية للمستوى (P).
* اذا كانت $\vec{u}$ منظمية لمستوى (P) فان كل متجهة $\vec{v}$ مستقيمية مع $\vec{u}$ تكون منظمية للمستوى (P)
* اذا كانت $\vec{u}$ منظمية لمستوى (P) و $\vec{v}$ منظمية لمســتوى (P') وكانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان (P) و(P') متوازيان
* إذا كان $(A;B)\in(P)^2$ و $\vec{u}$ منظمية لمستوى (P) فان $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$

تمرين في الفضاء المنسوب إلى معلم .م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

حدد تمثيل بارامتري للمستقيم (D) المار من(0 2 ;1-)A و العمودي على المستوى (P) الموجه بـالمتجهتين $\vec{u}(1;-1;1)$ و $\vec{v}(2;1;1)$

تمرين

في الفضاء المنسوب إلى معلم .م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر المستوى

(P) الذي معادلته ax-2y+z-2=0 و المستقيم (D) تمثيله بارامتري $\begin{cases} x=2t \\ y=1+3t \qquad t\in IR \\ z=-2+bt \end{cases}$

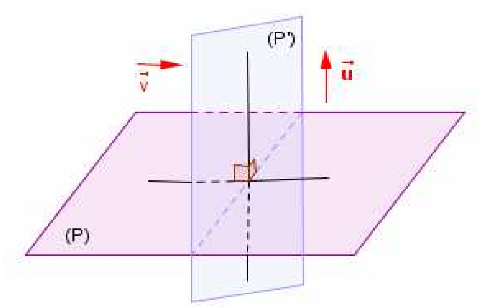
1- حدد متجهتين موجهتين للمستوى (P)
2- حدد a وb لكي يكون $(D)\perp(P)$

د- تعامد مستويين

تذكير يكون مستويان متعامدين اذا و فقط اذا اشتمل أحدهما على مستقيم عمودي على المستوى الآخر.

خاصية

ليكن (P) و (P') مستويين من الفضاء و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتيــن منظميتين لهما على التوالي
$(P')\perp(P)$ اذا وفقط اذا كان $\vec{u}\perp\vec{v}$



2- معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمية عليه

a. مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمية عليه

مبرهنة

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء
* المستوى المار منA و المتجهة $\vec{u}$ منظمية له هو مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$
* مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$ المستوى المار منA و المتجهة $\vec{u}$ منظمية له

b.معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمية عليه

خاصية

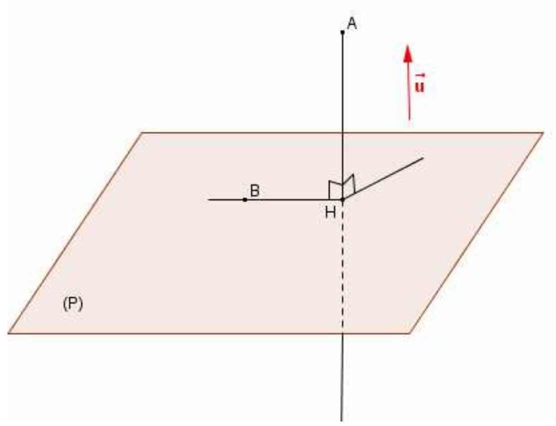
* كل مستوى (P) في الفضاء و$\vec{u}(a;b;c)$ منظمية عليه يقبل معادلة ديكارتية من نوع $ax+by+cz+d=0$
* كل معادلة ديكارتية من نوع $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ هي معادلة مستوى (P) في الفضاء بحيث $\vec{u}(a;b;c)$ منظمية عليه

تمرين

نعتبر (P) : 2x-y+3z+1=0 $(D):\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$

1- حدد متجهة $\vec{u}$ منظمية على (P) ونقطة منه.
2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من(2;0;3) A و$\vec{n}(1,2,1)$ منظمية عليه.
3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من(2;0;3) 'A والعمودي على (D)
4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من(2;0;3) A و الموازي لـ (P)

3- مسافة نقطة عن مستوى
1- تعريف و خاصية



الفضاء منسوب إلى معلم.م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
مسافة نقطة A عن مستوى (P) هي المسافة AH
حيثH المسقط العمودي لـ A على(P) نكتب

$$d\left(A;(P)\right) = AH = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}\right|}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

حيث (P) $\in$ B و $\vec{u}$ منظمية على(P)

2- خاصية

ليكن (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ و $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ نقطة من الفضاء

$$d\left(A;(P)\right) = \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال

ليكن (P) مستوى مار من $B\left(2;1;3\right)$ و $\vec{u}\left(1;-1;\sqrt{2}\right)$ منظمية عليه لتكن A (1;2;0)

حدد $d\left(A;(P)\right)$

تمرين1

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .
نعتبر A(1;-1;1) و B(3;1;-1) و (P) المستوى ذا المعادلة 2x-3y+2z=0 و (D) المستقيم الممثل بارا متريا بـ

$$\begin{cases} x = 3t \\ x = -2-3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2+4t \end{cases}$$

1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A والعمودي على المستقيم (D)
حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´) المار من A و B والعمودي على المستوى (P)
2- أحسب d(A;(P)) و d(A;(D))
3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´´) المار من B و الموازي للمستوى (P)

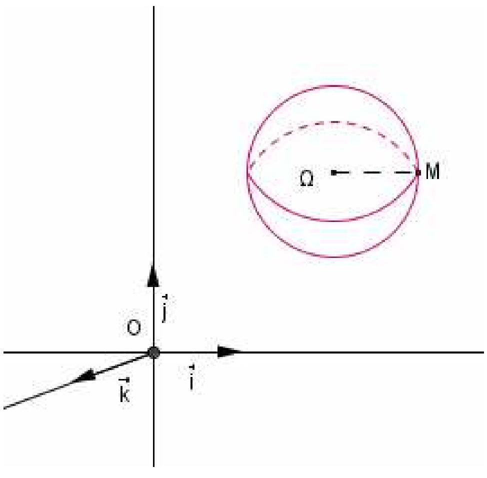
تمرين2

في فضاء منسوب إلى ملعم متعامد ممنظم.
نعتبر المستوى(P) ذا المعادلة 3x+2y-z-5=0 و (D) المستقيم المعرف بـ

$$\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$$

1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)
حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P´) الذي يتضمن (D) و العمودي على (P)

IV- معادلة فلكة



الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

1- معادلة فلكة معرفة بمركزها وشعاعها

لتكن Ω(a;b;c) نقطة من الفضاء (E) و $r \in \mathbb{R}^{*+}$ والفلكة S(Ω;r)
التي مركزها Ω و شعاعها r
ليكنM(x;y;z) من الفضاء (E)

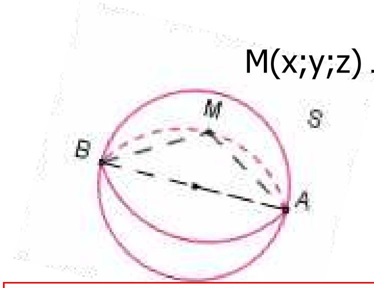
M$\in$ S(Ω;r) $\Leftrightarrow$ ΩM=r $\Leftrightarrow$ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

مبرهنة

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega;r)$ التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها r
هي $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

ملاحظات و اصطلاحات

* إذا كان A و B نقطتين من الفلكة $S(\Omega;r)$ حيث Ω منتصف [A;B] فان [A;B] قطرا للفلكة
* توجد فلكة وحيدة أحد أقطارها [A;B] مركزها Ω منتصف [A;B] و شعاعها $r=\frac{1}{2}AB$
* للفلكة $S(\Omega;r)$ معادلة ديكارتية من شكل $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ حيث α و β و γ وδ أعداد حقيقية.
* الفلكة $S(O;r)$ حيث O أصل المعلم معادلتها $x^2+y^2+z^2=r^2$
* الكرة لتكن $S(\Omega;r)$ فلكة التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها r
الكرة $B(\Omega;r)$ التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها r هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le r^2$



2- معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها

S فلكة أحد اقطارها [A;B]

$M\in S \Leftrightarrow$ [AMB] زاوية قائمة أو M=A أو M=B $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

مبرهنة

A و B نقطتان مختلفان في الفضاء
في الفضاء مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ هي فلكة التي أحد اقطارها [A;B]

خاصية

اذا كانت $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين مختلفتين فان معادلة الفلكة التي أحد اقطارها [A;B]
هي $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

تمرين

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر $\Omega(1;2;-1)$ و $A(2;1;2)$ و $B(4;1;2)$

1- حدد معادلة ديكارتية للفلكة S التي مركزها Ω و المار من A
2- حدد معادلة ديكارتية للفلكة S´ التي قطرها [A;B]

3- دراسة المعادلة $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$:(1)

لتكن E مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق المعادلة (1)
$M\in E \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-d$
لتكن $\Omega(a;b;c)$
-* إذا كان $a^2+b^2+c^2-d<0$ فان $E=\emptyset$
-* اذا كان $a^2+b^2+c^2-d=0$ فان $E=\{\Omega\}$. فلكة مركزها Ω و شعاعها منعدم
-* اذا كان $a^2+b^2+c^2-d>0$ فان $E=S(\Omega;r)$ حيث $a^2+b^2+c^2-d=r^2$

مبرهنة

a و b و c و d أعداد حقيقية
تكون مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق المعادلة $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ فلكة
إذا وفقط إذا كان $a^2+b^2+c^2-d\ge 0$

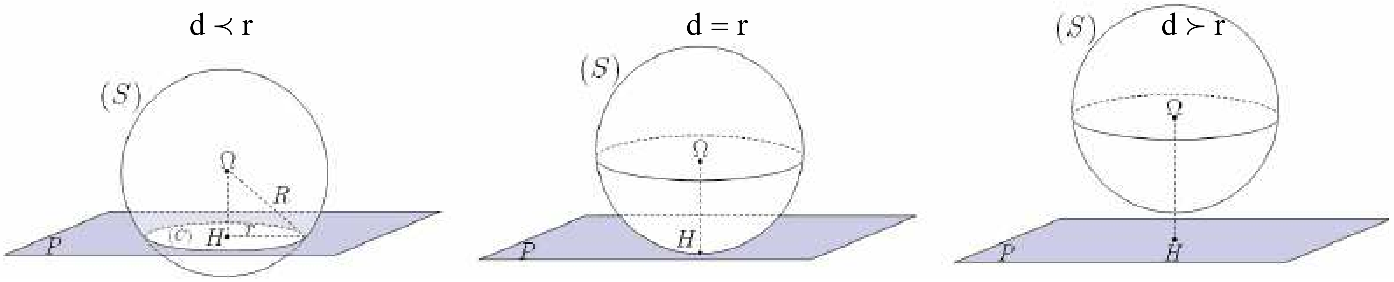
تمرين نعتبر E مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق المعادلة $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z+5=0$
بين إن E فلكة محددا عناصرها المميزة

تمرين حدد مجموعة النقط M التي تحقق $2MA^2+3MB^2=16$ حيث $A(2;0;-1)$ و $B(-1;1;-1)$

II – تقاطع مستوى و فلكة

1- تقاطع للفلكة $S(\Omega;r)$ و المستوى (P)

في الفضاءE نعتبر الفلكة $S(\Omega;r)$ و المستوى (P) و النقطة H المسقط العمودي لـ Ω على المستوى (P)
نضع $d(\Omega;(P))=H\Omega=d$



خاصية

ليكن (P) مستوى في الفضاء و S فلكة مركزها Ω و شعاعها r و H المسقط العمودي لـ Ω على المستوى(P)
يكون تقاطع (P) و S :

* دائرة مركزها H و شعاعها $\sqrt{r^2 - d^2(\Omega;(P))}$ اذا كان d(Ω;(P))< r
* نقطة اذا كان d(Ω;(P))= r في هذه الحالة نقول (P) مماس للفلكة S عند النقطة H
* المجموعة الفارغة اذا كان d(Ω;(P))>r

2- مستوى مماس لفلكة في أحد نقطها

تعريف

لتكن A نقطة من الفلكة S(Ω;r)
نقول إن المستوى (P) مماس للفلكة S عند النقطة A اذا كان (P) عمودي على (ΩA) في A

خاصية

لتكن A نقطة من الفلكة S(Ω;r)
(P) مماس على S(Ω;r) في A $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ $\forall M\in(P)$

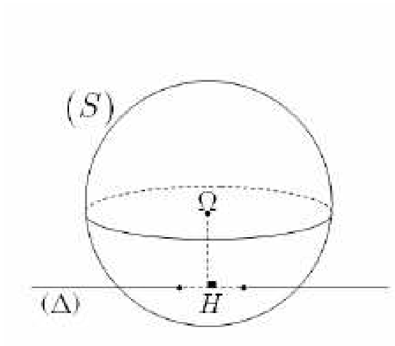
تمرين في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر S_1 الفلكة التي معادلتها
$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ و S_2 الفلكة التي مركزها Ω_2 و شعاعها 2 , و (P) المستوى الذي معادلته $x-2y+z+1=0$ و (P´) المستوى الذي معادلته $2x-y-2z-1=0$.

1- تأكد أن (P) و S_1 يتقاطعان وفق دائرة محددا عناصرها المميزة.
2- أدرس تقاطع (P´) و S_2 .
3- حدد معادلة المستوى المماس للفلكة S_1 عند النقطة A(1;1; 3)

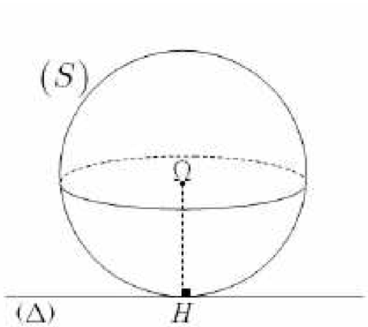
3-- تقاطع مستقيم و فلكة

في الفضاءE نعتبر الفلكة S(Ω;r) و المستقيم (Δ) و النقطة H المسقط العمودي لـ Ω على المستقيم (Δ)
نضع $d(\Omega;(\Delta)) = H\Omega = d$

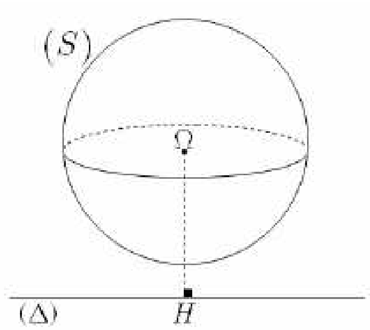
$d \prec r$ | $d \succ r$ | $d \succ r$



المستقيم (Δ) يخترق الفلكةS في نقطتين مختلفتين



المستقيم (Δ) الفلكةS يتقاطعان في النقطةH



تقاطع المستقيم (Δ) الفلكةS هو المجموعة الفارغة

تمرين

نعتبر S : $x^2+y^2+z^2-2y+4z+4=0$

$$(D_3):\begin{cases} x = \dfrac{-1}{2}+2t \\ y = \dfrac{1}{3}+3t \\ z = -2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad (D_2):\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 \\ z = -2+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad (D_1):\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = -3+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

حدد تقاطع S مع كل من (D_1) و (D_2) و (D_3)

تمارين

تمرين1

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر A(1;0;1) و B(0;0;1) و C(0;-1;1) و المستقيم (D) المار من C والموجه بـ $\vec{u}(-1;2;1)$

1- بين أن مجموعة النقط M حيث MA=MB=MC مستقيم وحدد تمثيلا بارا متريا له

2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) العمودي على (D) في C

3- استنتج معادلة ديكارتية للفلكة S المارة من A و B و المماسة لـ (D) في C

تمرين2

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر A(0;3;-5) و B(0;7;-3) و C(1;5;-3)

1- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A حيث $\vec{u}(-1;2;1)$ منظمية عليه

3- ليكن (P) المستوى المحدد بالمعادلة x+y+z=0

أ- تأكد أن (P)و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (D)

ب- حدد تمثيلا بارا متريا لـ (D)

4- نعتبر في الفضاء الدائرة (C) التي المحددة بـ $\begin{cases} x^2+z^2+10z+9=0 \\ y=0 \end{cases}$

أ- حدد معادلة للفكة S التي تتضمن الدائرة (C) و ينتمي مركزها إلى (ABC)

ب حدد تقاطع S و (AC)

تمرين3

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر A(1;-1;1) و B(3;1;-1) و (P) المستوى ذا المعادلة 2x-3y+2z=0 (D) المستقيم الممثل بارا متريا بـ $\begin{cases} x=3t \\ x=-2-3t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=2+4t \end{cases}$

1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A و B والعمودي على المستقيم (D)

2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´) المار من A و B والعمودي على المستوى (P)

3- أحسب d(A;(P)) و d(A;(D))

4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´´) المار من B و الموازي للمستوى (P)

تمرين4

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة 3x+2y-z-5=0

و (D) المستقيم المعرف بـ $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$

1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)

2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P´) الذي يتضمن (D) و العمودي على (P).

تمرين5

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة x+y+z+1=0

و المستوى (Q) ذا المعادلة 2x-2y-5=0

و (S) مجموعة النقط M(x;y;z) التي تحقق $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+11=0$

1- بين أن (S) فلكة محددا مركزها و شعاعها

2- تأكد أن (P) مماس للفلكة و حدد تقاطعهما

3- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من A(0;1;2) و العمودي على (P)

4- تحقق أن $(P)\perp(Q)$ و أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D´)تقاطع (P) و(Q)

تمرين6

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر النقطة A(-2;3;4)

المستوى (P) ذا المعادلة x+2y-2z+15=0 (S) مجموعة النقط M(x;y;z) التيتحقق $x^2+y^2+z^2-2x+6y+10z-26=0$ و (C) الدائرة التي معادلتها $\begin{cases} x^2+y^2-2x-8=0 \\ z=0 \end{cases}$

1- بين أن (S) فلكة محددا عناصرها المميزة

2- بين أن (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة كبرى (C') و حددها

3- حدد معادلتي المستوين المماسين للفلكة (S) و الموازيين لـ (P)

4- أكتب معادلة الفلكة (S') المار من A المتضمن للدائرة (C)

الجداء المتجهي

I- توجيه الفضاء

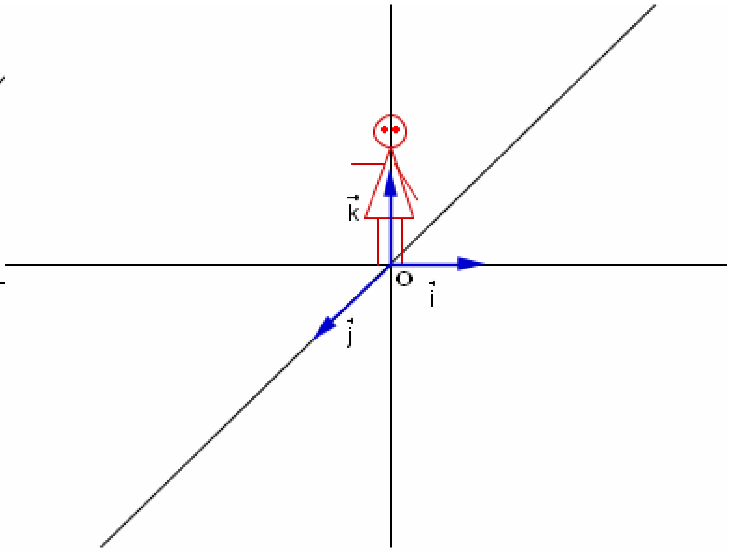
1- معلم موجه في الفضاء

ننسب الفضاء E إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

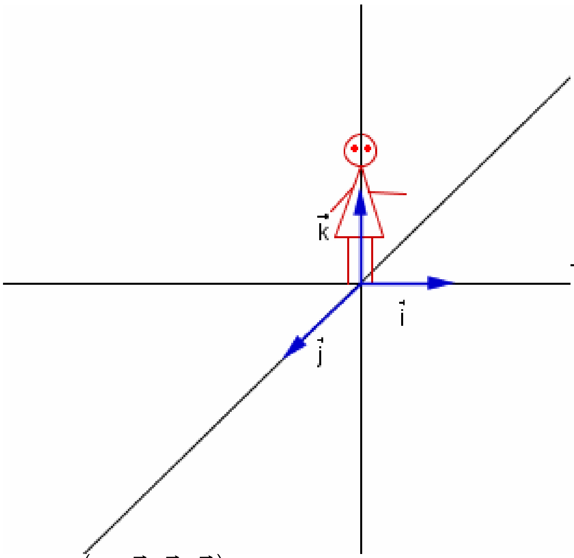
لتكن I وJ وK ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

« رجل أمبير » للمعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ هو رجل خيالي رأسه في النقطة K قدماه على النقطة O و ينظر إلى I

النقطة, J إما توجد على يمين« رجل أمبير » أو على يساره .



معلم مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$



معلم غير مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

تعريف :

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. لتكن I وJ وK ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

نقول إن : * $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم مباشر إذا وجدت J على يسار « رجل أمبير »

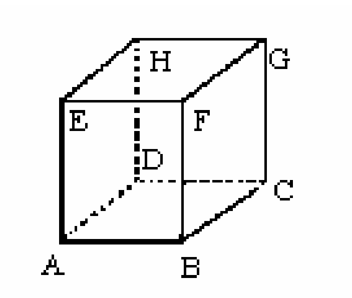
* $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم غير مباشر إذا وجدت J على يمين « رجل أمبير »

أمثلة * نعتبر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم مباشر

$\left(O;\vec{j};\vec{i};\vec{k}\right)$ معلم غير مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};-\vec{k}\right)$ معلم غير مباشر

$\left(O;\vec{j};\vec{k};\vec{i}\right)$ معلم مباشر

** ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1



$\left(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF}\right)$; $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ معلمان مباشران

$\left(E;\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EH}\right)$, $\left(A;\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right)$ معلمان غير مباشرين

2- الأسرة المباشرة

يمكننا توجيه الفضاء V_3 , اذا وجهنا جميع أساساته

تعريف

نقول إن الأساس المتعامد الممنظم $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ مباشر اذا كان $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ م.م.م. مباشر مهما كانت النقطة O من الفضاء

3- توجيه المستوى

ليكن (P) مستوى في الفضاء و $\vec{k}$ متجهة واحدية و منظمية على (P) , و O نقطة من المستوى (P) $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ م.م.م للمستوى (P)

لدينا $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد ممنظم للفضاء E

يكون المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ في المستوى (P) معلما مباشرا اذا كان المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ مباشرا

* يتم توجيه مستوى (P) بتوجيه متجهة منظمية عليه.
* كل المستويات الموازية لـ(P) له نفس توجيه المستوى (P)

II – الجداء المتجهي

1- تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء V_3 وA و B نقطتين من الفضاء E بحيث $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$
الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هدا الترتيب ,هو المتجهة التي لها بـ $\vec{u}\wedge\vec{v}$ المعرفة كما يلي :

* إذا كانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{o}$.
* إذا كانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فان $\vec{u}\wedge\vec{v}$ هي المتجهة التي تحقق :
  - $\vec{u}\wedge\vec{v}$ عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$
  - $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس مباشر .
  - $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$ حيث θ قياس الزاوية $[\widehat{AOB}]$

أمثلة * نعتبر $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$$
$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}\qquad \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}\qquad \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}\qquad \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}\qquad \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$$

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين واحديتين و متعامدتين فان $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس مباشر .

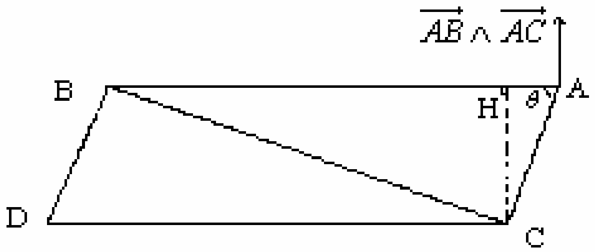
تمرين نحسب $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ علما أن $\theta\in]0;\pi[$ $\quad (\overline{\vec{u};\vec{v}})=\theta$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=-5$ $\quad \|\vec{v}\|=2$ $\quad \|\vec{u}\|=5$

2- خاصيات

أ- خاصية

إذا كانت Aو B وC ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء فان المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

لتكن Aو B وC ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء θ قياس الزاوية $[\widehat{CAB}]$, H المسقط العمودي لـ C على (AB)



$$HC=AC\sin\theta \qquad \|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=AB.AC.\sin\theta$$
$$\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=AB\times HC$$

خاصية

مساحة المثلث ABC هو نصف $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

نتيجة

مساحة متوازي الأضلاع ABDC هي $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

د- خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء
يكون $\vec{u}\wedge\vec{v}$ منعدما أذا وفقط كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

البرهان * $\Rightarrow$(بديهي – التعريف-)
* $\Leftarrow$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$
$$\Rightarrow\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta=0$$
$$\Leftrightarrow\|\vec{u}\|=0\quad\vee\quad\|\vec{v}\|=0\quad\vee\quad\sin\theta=0$$
$$\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}\quad\vee\quad\vec{v}=\vec{0}\quad\vee\quad\vec{u}et\vec{v}\quad sont\ liés$$

ملاحظة A وB و C مستقيمية $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

ج- الجداء المتجهي والعمليات(نقبل)

$$\forall(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\in V_3^3\qquad\forall\alpha\in\mathbb{R}\qquad(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$$
$$(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$$
$$\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}\wedge\vec{u}=\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$$

تمرين

$(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر .

أحسب $\vec{i}\wedge3\vec{j}$ $\quad(\vec{i}+2\vec{k})\wedge\vec{j}$ $\quad(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})\wedge\vec{k}$ $\quad(2\vec{i}-\vec{j})\wedge(3\vec{i}+4\vec{j})$

تمرين

لتكن $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}\wedge\vec{d}\quad;\quad\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}\wedge\vec{d}$

بين إن $\vec{a}-\vec{d}$ و $\vec{b}-\vec{c}$ مستقيميتان

3- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في م.م.م مباشر.

$(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{u}(x;y;z)\qquad\vec{v}(x';y';z')$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$$
$$=(yz'-zy')\vec{i}+(zx'-xz')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$$

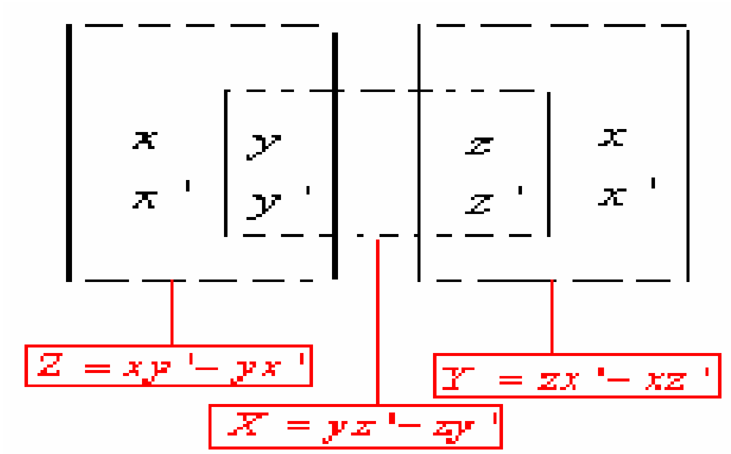
خاصية

الفضاء E منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x(;y';z')$ متجهتان من V_3

إحداثيات الجداء المتجهي $\vec{u}\wedge\vec{v}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ هو (X;Y;Z) حيث

$$X=yz'-zy'\qquad Y=zx'-xz'\qquad Z=xy'-yx'$$

ملاحظة يمكن استعمال الوضعية التالية



مثال نعتبر $\vec{v}(-2;-1;1)$ $\quad\vec{u}(1;2;0)$ $\quad A(1;2;1)$ $\quad B(0;-3;2)$ $\quad C(1;2;1)$

حدد $\vec{u}\wedge\vec{v}$ $\qquad$ أحسب مساحة المثلث (ABC)

III – تطبيقات الجداء المتجهي

1- معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمية

خاصية

لتكن A وB وC ثلاث نقط غير مستقيمية من فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AM}$$

مثال نعتبر A(1;2;3) و B(1;-1;1) و C(2;1;2) حدد معادلة المستوى (ABC)

2- تقاطع مستويين

نعتبر في فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

(P) : ax+by+cz+d=0

(P´) : a´x+b´y+c´z+d´=0

لدينا $\vec{n}(a;b;c)$ منظمية لـ (P) و$\vec{n}'(a';b';c')$ منظمية لـ (P´)

* اذا كان (P) و(P´) متقاطعين فان المستقيم (D) تقاطع (P) و(P´) موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$
* اذا كان $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq 0$ فان (P) و(P´) متقاطعان وفق مستقيم موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

تمرين

حدد تقاطع (P): x+2y-2z+3=0 و (P´): 4x-4y+2z-5=0

3- مسافة نقطة عن مستقيم

في الفضاء (D) مستقيم مار من A وموجه بـ $\vec{u}$, M نقطة من الفضاء وH مسقطها العمودي على(D)

$$\overrightarrow{AH} et \vec{u} \quad liés \qquad \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$$

$$\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\right\| = HM.\|\vec{u}\|\sin\frac{\pi}{2} = HM.\|\vec{u}\|$$

$$HM = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

خاصية

في الفضاء (D) مستقيم مار من A وموجه بـ $\vec{u}$, M نقطة من الفضاء.

مسافة النقطة M عن المستقيم (D) هي $d\left(M;(D)\right) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

تمرين

A(3;2;-1) $\qquad (D): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad d\left(A;(D)\right) = ?$

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر A(1;2;1) وB(-2;1;3) و (D) المستقيم الذي معادلته $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$

1- حدد $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد d(A;(D))

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S)التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)