

## نهايات المتتاليات

**2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية****حسابية  
خاصة**

إذا كان  $(u_n)_{n \geq p}$  متتالية حسابية أساسها  $r$  فإن

$$\forall n \geq p \quad u_n = u_p + (n - p)r$$

**ملاحظة** - إذا كان  $(u_n)_{n \geq p}$  متتالية حسابية أساسها  $r$

$$\text{فإن } \forall n \geq q \geq p \quad u_n = u_q + (n - q)r$$

**خاصة**

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية حسابية

إذا كان  $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$  فإن

$$S_n = \frac{(n - p)(u_p + u_{n-1})}{2}$$

$n - p$  هو عدد حدود المجموع  $S_n$  و  $u_p$  هو الحد الأول

للمجموع  $S_n$  و  $u_{n-1}$  هو الحد الأخير للمجموع  $S_n$

$$S_n = \frac{(\text{عدد حدود } S_n)}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول ل } S_n)$$

**II- المتتالية الهندسية****1- تعريف**

تكون متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  هندسية إذا كان يوجد عدد

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = qu_n \text{ بحيث } q$$

العدد  $q$  يسمى أساس المتتالية .

**2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية****هندسية  
خاصة**

إذا كان  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  فإن

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n = u_{n_0} q^{n - n_0}$$

**ملاحظة** - إذا كان  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية

$$\text{أساسها } q \text{ فإن } \forall n \geq p \geq n_0 \quad u_n = u_p q^{n - p}$$

**خاصة**

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  يخالف 1

إذا كان  $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$  فإن

$$S_n = u_p \left( \frac{1 - q^{n-p}}{1 - q} \right)$$

$n - p$  هو عدد حدود المجموع  $S_n$  و  $u_p$  هو الحد الأول

للمجموع  $S_n$

**ملاحظة** إذا كان  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  يخالف

1 فإن  $S_n$  مجموع  $n$  حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left( \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

**حالة خاصة** إذا كانت  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها

$$1 \text{ فإن } S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} = u_p (n - p)$$

**A- تذكير****أنشطة تذكيرية**

**نشاط 1:** نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين بـ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n \quad \begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1- بين أن  $(v_n)$  متتالية ثابتة .

2- استنتج أن  $(u_n)$  متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة

$$3- \text{أحسب } S'_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i \text{ بدلالة } n.$$

**نشاط 2:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1- أحسب  $u_2$  ;  $u_3$

2- بين أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  مكبورة بالعدد 3

3- أدرس رتبة  $(u_n)_{n \geq 1}$  و استنتج أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  مصغورة

بالعدد 2

4- نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ  $v_n = u_n - 3$

أ- بين أن  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية و أحسب  $v_n$  بدلالة  $n$  .

$$\text{ب- أحسب } S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i \text{ بدلالة } n$$

**1- المتتالية: المكبورة - المصغورة - المحدودة**

\* تكون المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  مكبورة إذا فقط إذا وجد

$$\text{عدد حقيقي } M \text{ بحيث } \forall n \geq n_0 \quad u_n \leq M$$

\* تكون المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  مصغورة إذا فقط إذا وجد

$$\text{عدد حقيقي } m \text{ بحيث } \forall n \geq n_0 \quad u_n \geq m$$

\* تكون المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  محدودة إذا فقط إذا كانت

$(u_n)_{n \geq n_0}$  مكبورة و مصغورة

**2- المتتالية الرتبية**

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow \text{متتالية تزايدية}$$

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \text{متتالية تزايدية قطعاً}$$

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow \text{متتالية تناقصية}$$

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow \text{متتالية تناقصية قطعاً}$$

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow \text{متتالية ثابتة}$$

**I- المتتالية الحسابية****1- تعريف**

تكون متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  حسابية إذا كان يوجد عدد

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r \text{ بحيث } r$$

العدد  $r$  يسمى أساس المتتالية .

## B - نهايات المتتاليات

### I - نهاية متتالية

نعرف نهاية متتالية كما عرفنا نهاية دالة عند  $+\infty$

نكتب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  باختصار  $\lim u_n$

**نشاط** نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$  حيث  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2$  و  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{1}{n} + 3$

نحدد  $\lim u_n$  و  $\lim v_n$

نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  إذن  $\lim u_n = +\infty$  نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 3 = 3$  إذن  $\lim v_n = 3$

### 1- تعريف نهاية منتهية لمتتالية

نقول ان نهاية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  تؤول إلى  $l$  إذا و فقط إذا كان كل مجال مفتوح مركزه  $l$  يحتوي على جميع حدود المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ابتداء من رتبة. نكتب  $\lim u_n = l$

### 2- تعريف نهاية لا منتهية لمتتالية

\*نقول ان نهاية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  تؤول إلى  $+\infty$  إذا و فقط إذا كان كل مجال على شكل  $[A; +\infty[$  يحتوي على جميع حدود المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ابتداء من رتبة. نكتب  $\lim u_n = +\infty$

\*نقول ان نهاية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  تؤول إلى  $-\infty$  إذا و فقط إذا كان كل مجال على شكل  $]-\infty; A]$  يحتوي على جميع حدود المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ابتداء من رتبة. نكتب  $\lim u_n = -\infty$

**ملاحظة**  $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim -u_n = +\infty$

### 3- نهايات متتالية مرجعية

خاصية

ليكن  $p$  عدد صحيح طبيعي  $p \geq 1$  و  $k$  عدد حقيقي

$$\lim \frac{1}{n^p} = 0 \quad \lim \frac{k}{\sqrt{n}} = 0 \quad \lim n^p = +\infty \quad \lim \sqrt{n} = +\infty$$

### 4 خاصة

لتكن متتالية عددية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $l$  عددا حقيقيا

$$\lim (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l$$

$$\lim |u_n - l| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l$$

### 5- متتالية متقاربة - متتالية متباعدة

تعريف

نقول إن متتالية متقاربة إذا و فقط كانت نهايتها منتهية.

نقول إن متتالية متباعدة إذا و فقط كانت غير متقاربة.

أمثلة

$$\text{نعتبر } u_n = \frac{-3}{n^2} + 4 \text{ و } v_n = n^3 \text{ و } w_n = (-1)^n$$

$(u_n)$  متقاربة لان  $\lim u_n = 4$

$(v_n)$  متباعدة لان  $\lim v_n = +\infty$

$(w_n)$  متباعدة لأن لا تقبل نهاية

### II- مصادق التقارب

**مصادق 1** لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية متقاربة لأعداد حقيقية موجبة

$l$  عدد حقيقي حيث  $\forall n \geq N \quad |u_n - l| \leq v_n \quad \exists N \in \mathbb{N}$

إذا كان  $\lim v_n = 0$  فان  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متقاربة و  $\lim u_n = l$

**مصدق 2** لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  متتاليتين عدديتين حيث  $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n \leq v_n$

إذا كان  $\lim u_n = +\infty$  فإن  $\lim v_n = +\infty$

إذا كان  $\lim v_n = -\infty$  فإن  $\lim u_n = -\infty$

**لازمة**

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  و  $(w_n)_{n \geq n_0}$  ثلاث متتاليات حيث  $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad v_n \leq u_n \leq w_n$

إذا كان  $\lim v_n = \lim w_n = l$  فإن  $\lim u_n = l$

**أمثلة** نعتبر  $(u_n)_{n \geq 1}$  حدد  $\lim u_n$  في الحالات التالية:

أ-  $u_n = n^2 + n - 3$       ب-  $u_n = -n^2 + n$       ج-  $u_n = \frac{\sin n}{n}$

أ- لدينا لكل  $n \geq 3$   $n^2 \leq n^2 + n - 3$  و حيث  $\lim n^2 = +\infty$  ومنه  $\lim u_n = +\infty$

ب- لدينا لكل  $n \geq 2$   $1 - \frac{n}{2} \leq 0$  ومنه  $1 - n \leq -\frac{n}{2}$  و بالتالي  $n - n^2 \leq -\frac{n^2}{2}$

وحيث  $\lim -\frac{n^2}{2} = -\infty$  فإن  $\lim u_n = -\infty$

ج- لدينا لكل  $n \geq 1$   $\left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$  و حيث  $\lim \frac{1}{n} = 0$  فإن  $\lim u_n = 0$

**تمرين:** نعتبر  $(u_n)_{n \geq 1}$  حيث  $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

بين بالترجع أن  $u_n \geq \sqrt{n}$  و استنتج  $\lim u_n$

### III- نهاية المتتالية الهندسية $q^n$

**الحالة 1:**  $q > 1$

يوجد عدد حقيقي موجب قطعاً  $a$  حيث  $q = 1 + a$  نعلم أن  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  ومنه  $q^n \geq 1 + na$

وحيث  $\lim 1 + na = +\infty$  فإن  $\lim q^n = +\infty$

**الحالة 2:**  $q = 1$  لدينا  $\lim q^n = 1$

**الحالة 3:**  $-1 < q < 1$

$|q| < 1$  ومنه  $\frac{1}{|q|} > 1$  ومنه  $\lim \left( \frac{1}{|q|} \right)^n = +\infty$  و بالتالي  $\lim |q^n| = 0$

إذن  $\lim q^n = 0$

**الحالة 4:**  $q \leq -1$  ليست لها نهاية

**خاصية**

إذا كان  $-1 < q < 1$  فإن  $\lim q^n = 0$   
إذا كان  $q \leq -1$  فإن  $(q^n)$  ليست لها نهاية

إذا كان  $q > 1$  فإن  $\lim q^n = +\infty$   
إذا كان  $q = 1$  فإن  $\lim q^n = 1$

**ملاحظة** \* المتتالية  $(q^n)$  متقاربة إذا كان  $-1 < q \leq 1$

\* ليكن  $r \in \mathbb{Q}^*$

إذا كان  $r < 0$  فإن  $\lim_{+\infty} n^r = 0$

إذا كان  $r > 0$  فإن  $\lim_{+\infty} n^r = +\infty$

**أمثلة** حدد  $\lim \left( \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n$  و  $\lim \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$

**تمرين** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة ب:

$$u_0 = \frac{3}{2} ; (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1}$$

(1) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$

(2) أدرس رتبة  $(u_n)$  و استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة

(3) أ- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

ب- استنتج :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$  ثم أحسب  $\lim u_n$

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{n+1} \end{cases}$$

**تمرين:** نعتبر المتتالية  $(u_n)$  حيث

بين أن  $\forall n \geq 10 \quad 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$  ثم حدد  $\lim u_n$

#### IV- خاصيات

**خاصية** كل متتالية متقاربة و موجبة تكون نهايتها موجبة

**خاصية** إذا كان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين متقاربتين نهايتها  $l$  و  $l'$  بحيث  $u_n \leq v_n$  لكل  $n \geq N$  فإن  $l \leq l'$

**مبرهنة** كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة  
كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

**ملاحظة** كل متتالية تزايدية و سالبة هي متتالية متقاربة  
كل متتالية تناقصية و موجبة هي متتالية متقاربة

**تمرين:** نعتبر  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية معرفة بـ  $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$

1- بين أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  تزايدية

2- بين أن  $\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$  ثم بين أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < 2$

3- استنتج أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  متقاربة.

#### V- العمليات على نهايات المتتاليات المتقاربة

##### 1- مبرهنة

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين متقاربتين و  $\alpha$  عدد حقيقي

$$\lim(\alpha u_n) = \alpha \lim u_n$$

$$\lim(u_n v_n) = \lim u_n \times \lim v_n$$

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$$

إذا كان  $\lim v_n \neq 0$  فإن  $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$

#### العمليات على النهايات

| $\lim \frac{u_n}{v_n}$        | $\lim(u_n \times v_n)$        | $\lim(u_n + v_n)$ | $\lim v_n$         | $\lim u_n$         |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| $(l' \neq 0) \frac{l}{l'}$    | $l \times l'$                 | $l + l'$          | $l'$               | $l$                |
| 0                             | $\infty$ مع وضع إشارة $l$     | $+\infty$         | $+\infty$          | $l \neq 0 \quad l$ |
| 0                             | $\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$ | $-\infty$         | $-\infty$          | $l \neq 0 \quad l$ |
| $\infty$ مع وضع إشارة $l$     | 0                             | $l$               | $0^+$              | $l \neq 0$ حيث $l$ |
| $\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$ | 0                             | $l$               | $0^-$              | $l \neq 0$ حيث $l$ |
| شكل غير محدد                  | 0                             | 0                 | 0                  | 0                  |
| 0                             | شكل غير محدد                  | $+\infty$         | $+\infty$          | 0                  |
| 0                             | شكل غير محدد                  | $-\infty$         | $-\infty$          | 0                  |
| شكل غير محدد                  | $+\infty$                     | $+\infty$         | $+\infty$          | $+\infty$          |
| شكل غير محدد                  | $+\infty$                     | $-\infty$         | $-\infty$          | $-\infty$          |
| شكل غير محدد                  | $-\infty$                     | شكل غير محدد      | $-\infty$          | $+\infty$          |
| $\infty$ مع وضع إشارة $l$     | $\infty$ مع وضع إشارة $l$     | $+\infty$         | $l$ حيث $l \neq 0$ | $+\infty$          |
| $\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$ | $\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$ | $-\infty$         | $l$ حيث $l \neq 0$ | $-\infty$          |

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3 + n - 1}}{\sqrt[3]{n^2 - 2n - 4}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n + 2}{n^2 - 1}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

## VI- متتاليات من نوع $f(u_n)$

### 1- خاصية

إذا كانت  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية متقاربة نهايتها  $l$  و  $f$  دالة متصلة في العدد الحقيقي  $l$  فان المتتالية  $(v_n)_{n \geq n_0}$  المعرفة بـ  $v_n = f(u_n)$  بحيث  $n \geq n_0$  متقاربة و نهايتها  $f(l)$

### 2- متتالية من نوع $u_{n+1} = f(u_n)$

#### نشاط

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n} \end{cases}$$

نعتبر  $(u_n)$  متتالية عددية حيث

1- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n \leq \frac{7}{2}$

2- لتكن  $(v_n)$  متتالية عددية حيث  $v_n = 1 - \frac{4}{u_n + 1}$

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية

ب- ب- حدد  $\lim v_n$  استنتج  $\lim u_n$

3- لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}_+^*$  حيث  $f(x) = \frac{2x+3}{x}$

أ- تأكد أن  $f$  متصلة على  $\left[2; \frac{7}{2}\right]$

ب- بين أن  $f\left(\left[2; \frac{7}{2}\right]\right) \subset \left[2; \frac{7}{2}\right]$

ت- حل المعادلة  $f(x) = x$

ماذا تلاحظ؟ ماذا تستنتج؟

### خاصية

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية معرفة بالعلاقة  $u_{n+1} = f(u_n)$  بحيث يوجد مجال  $I$  ضمن  $D_f$  و الحد الأول للمتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ينتمي إلى  $I$  و  $f$  متصلة على  $I$  و  $f(I) \subset I$ .  
إذا كانت  $(u_n)$  متتالية متقاربة فان نهايتها  $l$  هي حل للمعادلة  $f(x) = x$

### تمرين

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بـ

1- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < 2$ .

2- بين أن  $(u_n)$  متتالية تزايدية و استنتج أن  $(u_n)$  متتالية متقاربة.

3- استنتج  $\lim u_n$

### تمرين

نعتبر  $(u_n)$  متتالية حيث  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n)$  و  $u_0 = \frac{1}{2}$

بين أن  $(u_n)$  متقاربة و حدد نهايتها