

نهاية متتالية

تمرين 1: نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n - 2}{2U_n - 1} \end{cases}$$

(الجزءان (I) و (II) مستقلان)

(I) نضع $V_n = \frac{2 - U_n}{U_n - 1}$

(1) بين أن (V_n) متتالية حسابية محددًا أساسها وحدها الأول V_0 .

(2) حدد V_n ثم U_n بدلالة n .

(3) امنتج $\lim U_n$

(II) نضع $f(x) = \frac{3x - 2}{2x - 1}$

(1) بين أن الدالة f تزايدية على المجال $I = [1, 2]$.

امنتج أن: $f(I) \subset I$

(2) بين أن: $\forall x \in I: f(x) \leq x$

(3) بين بالترجم أن: $\forall n \in \mathbb{N}: 1 \leq U_n \leq 2$

(4) أدرس رقابة (U_n) ثم امنتج أنها متقاربة.

(5) حدد من جديد $\lim U_n$

تمرين 2: نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 2} \end{cases}$$

(الجزءان (I) و (II) و (III) مستقلة)

(I) نضع $V_n = U_n^2 - 4$

(1) بين أن (V_n) متتالية هندسية محددًا وحدها الأول V_0 .

(2) حدد V_n ثم U_n بدلالة n .

(3) امنتج $\lim U_n$

(II) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq U_n \leq 2$

(2) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - U_n)$

(3) امنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N}: |U_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(4) حدد من جديد $\lim U_n$.

(III) نضع $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 2}$

(1) بين أن الدالة f تزايدية على المجال $I = [0, 2]$. امنتج أن

$f(I) \subset I$:

(2) بين أن: $\forall x \in I: f(x) \geq x$

(3) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}: U_n \in I$

(4) أدرس رقابة (U_n) ثم امنتج أنها متقاربة.

(5) حدد مرة أخرى $\lim U_n$

تمرين 3: (الجزءان (I) و (II) غير مستقلان)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي:

$$f(x) = \sin x$$

(I) (1) أدرس رقابة الدالة f .

(2) بين أن: $f(I) \subset I$

(3) بين المعادلة $f(x) = x$ تقبل 0 كحل وحيد في المجال I .

(II) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{\pi}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

(1) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}: U_n \in I$

(2) بين بالترجم أن (U_n) تناقصية ثم امنتج أنها متقاربة.

(3) حدد $\lim U_n$

تمرين 4: (الجزءان (I) و (II) مستقلان)

ليكن θ من المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. نعتبر المتتالية العددية (U_n)

$$\begin{cases} U_0 = \cos \theta \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{U_n + 1}{2}} \end{cases}$$

المعرفة بما يلي:

(1) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq U_n \leq 1$

(2) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}: |U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|U_n - 1|$

(3) امنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N}: |U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\cos \theta - 1|$

(4) حدد $\lim U_n$

(5) نذكر أن: $\forall x \in \mathbb{R}: \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

a. بين بالترجم أن: $\forall n \in \mathbb{N}: U_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

(5) حدد من جديد $\lim U_n$

تمرين 5: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [0; +\infty[$ ب:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x}$$

(1) أدرس رقابة الدالة f .

(2) بين أن: $f(I) \subset I$

(3) بين أن: $\forall x \in I: f(x) \geq 2x$

(4) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a. بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}: U_n \in I$

b. بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}: U_{n+1} \geq 2U_n$

c. امنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N}: U_n \geq 2^n$

d. بين أن: $\lim U_n = +\infty$

بعض الناس هما وبعض الناس حرم من الثومة وبعض الناس كيف المسل في الكرجومة وبعض الناس اللهم البحر ولا هما