Notions de Logique
par : Mr. Ali TAMOUSSIT

Exercice 1 :

Montrer que si $r \in \mathbf{Q}$ et $x \notin \mathbf{Q}$ alors $x + r \notin \mathbf{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbf{Q}$.

Exercice 2:

Montrer que la racine carrée d'un nombre irrationnel positif est un nombre irrationnel.

Exercice 3:

Soient a et b deux réels. Montrer que :

$(\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2)$ ($ax + by = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \; et \; b = 0$).

Exercice 4:

Soient $a, b, c \; et \; d$ quatre réels vérifiant : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$.

Montrer que : $a = b = c = d$.

Exercice 5:

Soient a et b deux entiers relatifs.

Montrer que : $a < b \quad \Rightarrow \quad a \leq b - 1$.

Exercice 6:

Soient a et b deux réels.

Montrer que : $a + b < 2 + a^2 + b^2$.

Exercice 7:

Soient a et b deux réels. Montrer :

$(\forall \varepsilon > 0, \quad a \leq b + \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b$.

Exercice 8:

Soient a et b deux réels tels que pour tout nombre réel x vérifiant $x > b$, on ait $a \leq x$.

Montrer que : $a \leq b$.

Exercice 9:

Soient $a, b \; et \; c$ trois réels.

Montrer que : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Exercice 10:

Soient $a, b \; et \; c$ trois réels tels que : $0 \leq a \leq b \; et \; 0 < c$.

Montrer que : $\sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{c}.(b - a) + c$.

Exercice 11:

Soient $a, b \; et \; c$ trois réels tels que : $3.a^2 = 2.(c^2 - b^2)$.

Montrer que : $|c| \geq \sup(|a|, |b|)$.

Exercice 12:

Soient $a, b \; et \; c$ trois réels strictement positifs.

Montrer que : $a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad (a^6 + b^6 - c^6)^3 + 27a^6b^6c^6 = 0$.

Exercice 13:

Soient a, b *et* c trois réels.

1. Montrer que si $\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|<c$, alors $|a|<c$ *et* $|b|<c$.
2. Montrer que : $|a+b|=|a|+|b|$ si et seulement si $ab\geq 0$.
3. Montrer que : $\frac{a+b}{2}.\frac{b-a}{2}\geq 0$ *ou* $\frac{a+b}{2}.\frac{a-b}{2}\geq 0$.
4. Déduire que : si $|a|<c$ *et* $|b|<c$, alors $\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|<c$.

Exercice 14:

Soinet $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$, a et b deux réels strictement positifs tel que : $a<b$.
Montrer que : $n(b-a)a^{n-1}\leq b^n-a^n\leq n(b-a)b^{n-1}$.

Exercice 15:

Soient a, b, c *et* d quatre réels vérifiant : $a\leq b$ *et* $c\leq d$ *et* $a+c=b+d$.
Montrer que : $a=b$ *et* $c=d$.

Exercice 16:

Soit a un réel.
Montrer que : $\forall\varepsilon>0,\quad |a|\leq\varepsilon \quad\Rightarrow\quad a=0$.

Exercice 17:

Soit a un réel compris entre 0 *et* π.
Montrer, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité : $|\sin(na)|\leq n\sin(a)$.

Exercice 18:

Soit n un entier ≥ 2.
Montrer que : $\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k})=\frac{1}{n}$.

Exercice 19:

Soit n un entier naturel non nul.
Montrer que : $\sqrt{\frac{n}{n+1}}\notin\mathbf{Q}$.

Exercice 20:

Soient n un entier naturel non nul et $x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathbf{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2=n$.
Montrer que : $\forall k\in\{1,2,\ldots,n\},\quad x_k=1$.

Exercice 21:

Soit $I=[a,b]$ *avec* $a<b$.
Montrer que tout élément x de I s'écrit sous la forme
$x=\alpha.a+(1-\alpha).b$ *avec* $0\leq\alpha\leq 1$.

www.nacermaths.com
الأستاذ : نـــــاصر ب.

Exercice 22:

Soient a et b deux réels tels que $a \le b$ *et* $a+b>0$ et soit $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ où n est un entier naturel non nul.

Montrer que : $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \ge \dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k^{\,2}}{n(a+b)}$.

Exercice 23:

Soient a, b *et* θ trois réels.

Montrer que : $(a\cos(\theta)+b\sin(\theta))^2 \le a^2+b^2$.

Exercice 24:

Soient a, b *et* c trois réels strictement positifs.

On pose : $\alpha = a+\dfrac{1}{b}$, $\beta = b+\dfrac{1}{c}$ *et* $\gamma = c+\dfrac{1}{a}$.

Montrer que : $\max(\alpha,\beta,\gamma) \ge 2$.

Exercice 25:

1. Etablir : $\forall x \in [0,1],\quad 0 \le x(1-x) \le \dfrac{1}{4}$.
2. En déduire : $\forall a,b,c \in [0,1],\quad \min\big(a(1-b), b(1-c), c(1-a)\big) \le \dfrac{1}{4}$.

Exercice 26:

1. Soit n un entier naturel non nul , montrer que :
   $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.
2. En déduire la partie entière de : $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{10000}}\right)$.

Exercice 27:

Soient n un entier relatif et x un nombre réel.

1. Montrer que : $E(x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbf{Z}$.
2. Montrer que : $E(x+n)=E(x)+n$.

Exercice 28:

Soient x *et* y deux réels , montrer que :

1. $x \le y \quad \Rightarrow \quad E(x) \le E(y)$.
2. $E(x)+E(y) \le E(x+y) \le E(x)+E(y)+1$.

Exercice 29:

Soient n un entier naturel non nul et x un nombre réel.

1. Montrer que : $E\left(\dfrac{E(n.x)}{n}\right) = E(x)$.
2. Déduire que : $E\left(\dfrac{E(x)}{n}\right) = E\left(\dfrac{x}{n}\right)$.