تمارين حول الحساب المثلثي

تمرين1

بين أن

$$\cos 3x + \sin 3x = (\cos x - \sin x)(4\cos x \sin x + 1)$$

$$\cos^2 \frac{5}{2}x - \cos^2 \frac{3}{2}x = (-\sin 4x)\sin x$$

$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$

$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$$

$$\tan x - \tan y = \frac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$$

$$\tan^2 x - \tan^2 y = \frac{\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)}{\cos^2 x\cos^2 y}$$

تمرين2

نعتبر $(E):\quad \sin 3x = -\sin 2x$

1- حل المعادلة (E) في $\mathbb{R}$ ثم في $]-\pi;\pi]$

2- أ- بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\quad \sin 3x = (4\cos^2 x - 1)\sin x$

ب- استنتج أن $(E) \Leftrightarrow (4\cos^2 x + 2\cos x - 1)\sin x = 0$

3- حدد من بين حلول المعادلة (E) في المجال $]-\pi;\pi]$ التي تحقق $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$

4- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $4x^2 + 2x - 1 = 0$

5- استنتج $\cos\frac{2\pi}{5}$ و $\cos\frac{4\pi}{5}$

تمرين3

نعتبر $p(x) = 2\sin^2 x - 10\sin x.\cos x + 12\cos^2 x$

1- بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\quad 2\sin^2 x + 12\cos^2 x = 5\cos(2x) + 7$

2- استنتج أن $\forall x\in\mathbb{R}\quad p(x) = 5\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+7$

3- حل المعادلة $p(x) = 12\quad x\in]-\pi;\pi]$ ومثل حلولها على الدائرة المثلثية

4- حل المتراجحة $p(x) \prec 7\quad x\in\left]-\frac{5\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right]$

تمرين4

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(E):$ $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 9x = 0$

تمرين5

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $\cos x + \cos y = a$ و $\sin x + \sin y = b$ و $a^2 + b^2 = 1$

1- بين أن $\cos(x-y) = -\frac{1}{2}$

2- بين أن $\sin(x+y) = 2ab$

تمرين6

ليكن a و b من $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$

بين أن $\tan(a+b)\le\frac{\tan 2a+\tan 2b}{2}$

تمرين7

-1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=0$

$\sin 2x=\tan x \quad ; \quad \tan x\cdot\tan 4x=-1$

$\cos x+\sin x=1$

$\cos 2x+\cos x-2=0$

$\cos 2x+\sin 2x=1$

-2 حل المتراجحتين

$x\in[0;\pi] \quad \sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\succ -1$

$x\in]-\pi;\pi] \quad \cos x+\sin x+\tan x\ge\frac{1}{\cos x}$

تمرين8

-1 بين أن $\forall x\in\mathbb{R} \quad \cos 3x=\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)$

-2 أ) حل في $[0;2\pi[$ المعادلة $\cos 3x=\frac{1}{2}$

ب) بين أن $\cos\frac{\pi}{9}$ و $\cos\frac{7\pi}{9}$ و $\cos\frac{13\pi}{9}$ حلول

للمعادلة $8X^3-6X-1=0$

ج) استنتج قيم $A=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}$

$B=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$

$C=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$

تمرين9

ليكن x و y و z أعداد حقيقية حيث $x+y+z=\pi$

بين أن

أ- $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z-1=-2\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z$

ب- $\tan x+\tan y+\tan z=\tan x\cdot\tan y\cdot\tan z$ حيث x و y و z تخالف $\frac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}/$

ج- $\frac{\cos x}{\sin y\sin z}+\frac{\cos y}{\sin x\sin z}+\frac{\cos z}{\sin y\sin x}=2$ حيث x و y و z تخالف $k\pi \quad k\in\mathbb{Z}/$

تمرين10

نعتبر $p(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$ و $Q(x)=1+\cos x+\cos 2x$

-1 بين أن $p(x)=\sin 2x(1+2\cos x)$ و $Q(x)=\cos x(1+2\cos x)$

-2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x)=Q(x)$

-3 حل المتراجحة $Q(x)\ge 0 \quad x\in[0;\pi]$

تمرين11

1- أ- تحقق أن $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

ب- حدد α حيث $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\alpha)$

2- نعتبر المعادلة: $(E):\quad \tan x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

بين أن $(E)\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

3- أ- حل في $[0;2\pi]$ المعادلة (E)

ب- حل في $[0;2\pi]$ المتراجحة $\tan x\prec\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$