الأستاذ : نـــــــاصر ب.

الاشتقاق و تطبيقاته — الأولى باكالوريا علوم رياضية

تمرين 1

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$h(x)=x^3-3x-1$.

1. ادرس تغيرات الدالة h.
2. بين أن المعادلة $(E): h(x)=0$ تقبل ثلاث حلول حقيقية (نرمز للحلول الثلاث ب x_1 و x_2 و x_3).
3. أحسب : $x_1+x_2+x_3$ و $x_1x_2x_3$ و $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$.

تمرين 2

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجال $[a,b]$ حيث $a<b$.

نفترض أن:

- f و g متصلتان على $[a,b]$ و قابلتان للاشتقاق على $]a,b[$.
- $\forall x\in]a,b[\quad |f'(x)|\le g'(x)$.

1. بين أن g دالة تزايدية على $[a,b]$.
2. بين أن $(f-g)$ تناقصية على $[a,b]$، ثم استنتج أن : $f(b)-f(a)\le g(b)-g(a)$.
3. بين أن $(f+g)$ تزايدية على $[a,b]$، ثم استنتج أن : $-(f(b)-f(a))\le g(b)-g(a)$.
4. استنتج أن : $|f(b)-f(a)|\le g(b)-g(a)$.
5. تطبيقات:
   - ❖ h دالة عددية معرفة و متصلة على مجال $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ بحيث:
     $(\exists M\ge 0)(\forall x\in]a,b[): \quad |h'(x)|\le M$.
     بين أن: $|h(b)-h(a)|\le M(b-a)$.
     ماذا يمكن القول في حالة: $M=0$ ؟
   - ❖ بين أن: $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\le\frac{\pi}{48}$.

تمرين 3

لتكن f دالة عددية معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=0$ بحيث $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.

حدد النهاية التالية: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\prod_{k=1}^{n} f(kx)}{x^n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

تمرين 4

لتكن φ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ حيث تحقق العلاقة التالية:
$(\Re):\quad (\forall x\in\mathbb{R}),\quad \varphi''(x)=(1+x^2)\varphi(x)$.

بين أنه إذا كانت u و v دالتين تحققان العلاقة $(\Re)$، فإن: $uv'-u'v$ دالة ثابتة.

تمرين 5

f و g دالتين عدديتين بحيث: $f'(x)=\frac{1}{x}$ و $fog(x)=x$.

1. بين أنه إذا كانت g قابلة للاشتقاق، فإن: $g'(x)=g(x)$.
2. استنتج أن: $\forall n\in\mathbb{N},\ g^{(n)}(x)=g(x)$.

تمرين 6

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

أدرس زوجية الدالة f' حسب زوجية الدالة f.

تمرين 7

I مجال من $\mathbb{R}$ و a عنصر منه.

لتكن f و g دالتين عدديتين قابلتين للاشتقاق على I بحيث:
$(\forall x\in\mathrm{I}),\quad f(x)+x\le g(x)+a$ و $f(a)=g(a)$.

بين أن: $g'(a)-f'(a)=1$.

تمرين 8

f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I مركزه 0 بحيث: $\forall x\in\mathbf{I}\quad f(x)=(x^2+1)g(x)-\dfrac{g(x^2)}{x+1}$.

أحسب $f'(0)$ علما ان: $g'(0)=0$ و $g(0)=1$.

تمرين 9

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

1. بين أن: $\forall x \in \mathbb{R}^{+}, (1+x)^{n} \geq 1+nx$.
2. استنتج أن: $(1+n)^{n} \geq 2n^{n}$.

تمرين 10

لتكن f و g دالتين عدديتين غير منعدمتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

n عدد صحيح طبيعي.

بين ما يلي:

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \quad ; \quad \frac{\left(\frac{f}{g}\right)'}{\left(\frac{f}{g}\right)} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \quad ;$$

$$\frac{(f^{n})'}{f^{n}} = n\frac{f'}{f}$$

تمرين 11

ادرس قابلية اشتقاق الدالتين f و g في النقطة $x_0 = 0$ حيث:

$$\begin{cases} f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} g(x) = x\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}.$$

تمرين 12

مساحة مستطيل هي $81m^2$.

حدد بعدي هذا المستطيل لكي يكون محيطه دنويا.

تمرين 13

انطلاقا من حبل طوله l نقوم بتقسيمه لجزأين أحدهما نكون به دائرة بينما الآخر نكون به مربعا.

حدد موضع قطع الحبلين لكي تكون المساحة المحددة بالدائرة و المربع قصوية.

تمرين 14

بين أن: $\forall x \in \mathbb{R}^{+}, \quad \sin x \leq x$.

تمرين 15

بين أن: $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.

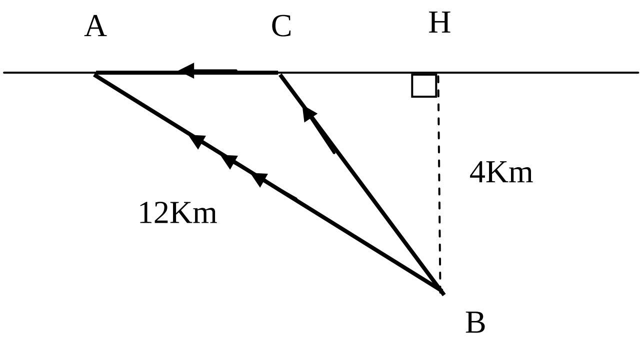
تمرين 16

من بين المثلثات القائمة الزاوية و التي لها نفس المحيط، ما هو المثلث الذي يكون شعاع دائرته المحاطة قصويا؟

تمرين 17

أراد شخص أن يذهب من نقطة B إلى نقطة A تبعد عن B بمسافة 12Km يمكنه أن يذهب مباشرة مشيا على الأقدام بسرعة 5Km/h أو أن يلتحق في نقطة C. بطريق تقع على مسافة 4Km من النقطة B حيث تسير حافلة بسرعة 40Km/h.

حدد موضع النقطة C بحيث تكون مدة السفر الكلية دنوية.



تمرين 18

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$f(x) = 3\sin(2\alpha x) + 2\sin(3\beta x)$ ، حيث α و β عددان حقيقيان.

نفترض أن: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq |\sin x|$.

1. بين أن: $|f'(0)| \leq 1$.
2. استنتج أن: $|\alpha + \beta| \leq \frac{1}{6}$.